DOI：10.11858/gywlxb.20251242

考虑剪胀效应的陶瓷动态球形空穴膨胀模型*

李晓，梁烜，文鹤鸣

（中国科学技术大学中国科学院材料力学行为和设计重点实验室，安徽 合肥 230026）

摘 要：空穴膨胀理论常用来预测靶板对弹体的侵彻阻力。提出了一种陶瓷材料的球形空穴膨胀模型，通过引入剪胀-运动学关系，考虑了陶瓷在破碎区的剪胀效应。根据剪切强度是否达到最大值（平台），将破碎区进一步划分为线性破碎区（满足 Mohr-Coulomb 准则）和饱和破碎区（满足最大剪切强度）。首先，给出了计算空腔表面径向应力的方程；其次，对陶瓷在不同扩张速度下的空腔膨胀过程进行了数值模拟；最后，讨论了抗压强度、体积模量、密度、泊松比和抗拉强度等参数对空腔表面径向应力的影响。结果表明，模型预测的空腔径向应力、开裂区和破碎区界面速度与数值模拟结果吻合良好；抗压强度对提高空腔的径向应力起主导性作用，密度的影响随空腔膨胀速度的增加而增加。

关键词：球形空穴膨胀；陶瓷；理论模型；阻力函数；数值模拟

中图分类号：O347.1; O521.9　　**文献标识码：**A

陶瓷材料因其高硬度与低密度的特性，在防护装甲领域得到了日益广泛的应用。在分析侵彻问题时，动态空穴膨胀理论常被用于简化靶板响应，通过求解空腔表面的径向应力来确定靶体的侵彻阻力，进而建立用于评估陶瓷装甲抗弹性能的侵彻模型。因此，建立精确的陶瓷空穴膨胀模型兼具重要的学术价值与军事应用前景。

Luk 和 Forrestal[1]针对弹体侵彻钢筋混凝土靶板问题，首次提出了描述材料弹性-塑性响应的模型。Xu 等[2]在研究卵形弹侵彻素混凝土靶板时，建立了材料内部形成弹性-开裂响应的球形空穴膨胀模型。之后，Forrestal 和 Tzou[3]进一步发展了该理论，提出了材料内部形成弹性-开裂-塑性响应的球形空穴膨胀模型，其中材料压力-体积应变关系被理想化为不可压缩或线性可压缩；剪切强度-压力关系采用 Mohr-Coloumb 准则。他们的研究指出，如果空腔膨胀速度足够高，开裂区将消失，形成弹性-塑性响应。在此基础上，He 等[4]提出了考虑剪胀效应的混凝土动态球形空穴膨胀模型，也发现了空穴膨胀速度足够高时开裂区会消失的现象。Xu 和 Wen[5]提出了考虑 Hoek-Brown 强度准则的混凝土动态球形空穴膨胀模型。Kong 等[6]提出了考虑双曲屈服准则和 Murnaghan 状态方程的混凝土动态空穴膨胀模型。Feng 等[7]针对率相关混凝土材料，建立了考虑尺寸效应的修正 Drucker-Prager Cap 准则的动态球形空穴膨胀模型。Deng 等[8]考虑了破碎区钢筋的环向约束效应，建立了适用于钢筋混凝土材料的动态球形空穴膨胀模型。Pu 等[9]根据空穴膨胀模型建立了分析钢筋混凝土墙开坑半径和弹道极限的理论模型。

Forrestal 和 Longcope[10]将空穴膨胀理论应用于陶瓷材料，得到了长杆弹侵彻陶瓷靶板的修正 A-T 模型。Satapathy 和 Bless[11]基于陶瓷在压缩失效后呈粉碎状态，假定陶瓷材料内部形成弹性-开裂-破碎响应并满足 Mohr-Coloumb 准则，建立了相应的空穴膨胀模型以预测空腔表面径向应力。随后，Satapathy 和 Bless[12]提出了满足双曲线压剪行为的空穴膨胀模型，用来预测完整和破碎陶瓷材料的阻力函数。基于剪切强度-压力的关系，Satapathy[13]进一步提出把破碎区划分为线性破碎区

*收稿日期：2025-10-28；修回日期：2025-12-18
作者简介：李 晓（2001－），男，硕士研究生，主要从事冲击动力学研究. E-mail：lx20010923@mail.ustc.edu.cn
通信作者：文鹤鸣（1965－），男，博士，教授，主要从事冲击动力学研究. E-mail：hmwen@ustc.edu.cn

和饱和破碎区，得到了空腔表面径向应力的表达式；结果也表明：如果空腔膨胀速度足够高时开裂区将消失，材料内形成弹性-破碎响应，这与 Forrestal 和 Tzou[3]在混凝土中的研究结果一致。Bavdekar 等[14]针对陶瓷的剪切强度-压力关系提出了扩展的 Mohr-Coloumb 强度准则，并将其运用到球形空穴膨胀理论中用来预测厚陶瓷靶板的抗侵彻阻力；Bavdekar 等[15]根据新近提出的陶瓷空穴膨胀模型建立了长杆弹侵彻厚陶瓷靶板的界面驻留和侵彻统一模型。Wang 和 Li[16]将动态损伤演化引入陶瓷的空穴膨胀模型中，用于预测弹体对陶瓷靶板的侵彻阻力。

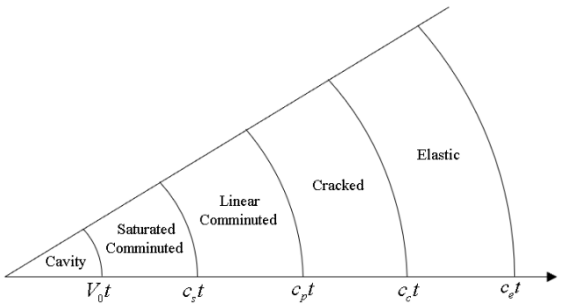
Wang 等[17]在研究弹体对混凝土介质侵彻与贯穿问题的比例尺度关系时考虑了剪胀效应。He 等[4]通过引入剪胀-运动学关系考虑了破碎区材料的剪胀效应和可压缩性，建立了混凝土材料的动态球形空穴膨胀模型。Chen 和 More[18]从 ZrO_2 陶瓷液压实验结果中发现其相变塑性通常表现出剪胀效应。Stam 等[19]在研究陶瓷的裂纹扩展时考虑了剪胀效应。Satapathy 和 Bless[12]通过引入雅可比行列式来表征破碎区的密度变化（即剪胀效应），并建立了陶瓷的动态空穴膨胀模型。

然而，在已有的陶瓷空穴膨胀模型中，破碎区通常被视为线性压力-体变关系或简化为不可压缩，只考虑了材料的压缩性而忽略了膨胀性，可能会给结果带来较大误差。本文提出一个考虑剪胀效应的陶瓷材料动态球形空穴膨胀模型，通过引入剪胀-运动学关系，考虑材料在破碎区的剪胀效应和压缩性。同时，根据剪切强度是否达到最大值，将破碎区进一步划分为线性破碎区（满足 Mohr-Coulomb 准则）和饱和破碎区（满足最大剪切强度），并给出计算空腔表面径向应力的方程和数值解。利用新近开发的陶瓷动态本构模型来数值模拟 AD995 陶瓷在不同扩张速度下空腔的膨胀过程。将模型预测与数值模拟结果进行比较，并讨论抗压强度、体积模量、靶板密度、泊松比和拉伸强度对空腔径向应力的影响。

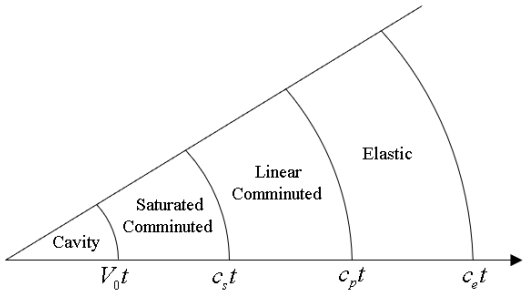
1 动态球形空穴膨胀近似理论

1.1 响应区

在无限大介质中，假定一个球形空穴直径从零开始以恒定速度 V 向外膨胀。当膨胀过程达到稳态后，空腔周围将形成一系列稳定的响应区域。确定这些响应区的分布是确定材料空腔径向应力的首要步骤，如图 1 所示。在较低的空腔膨胀速度下，陶瓷介质内部形成以下响应区：空腔、饱和破碎区、线性破碎区、开裂区、弹性区。空腔瞬时膨胀产生的弹性波以体波速向外传播。弹性区内材料承受的环向应力为拉伸应力，由于陶瓷的抗拉强度很低，环向拉应力超过材料抗拉强度时将出现径向裂纹，形成开裂区，在该区域内材料的承载模式发生转变，仅能承受径向压缩应力。一旦该应力值超过材料的抗压强度，介质将被压溃，进而形成破碎区，最终在材料内部形成弹性-开裂-破碎响应[13]，见图 1（a）。随着空腔膨胀速度的提高，开裂区范围逐渐收缩，而破碎区边界向外扩展并可能超越开裂区，致使开裂区完全消失，材料响应随之转变为弹性-破碎响应[13]，见图 1（b）。实验表明：陶瓷材料的剪切强度具有明显的压力相关性，在围压相对较小时陶瓷材料被认为服从 Mohr-Coulomb 准则；在围压较大时，其剪切强度趋于一恒定值[20,21]。因此，陶瓷材料的破碎区又可进一步划分为两个子响应区：线性破碎区（满足 Mohr-Coulomb 准则）和饱和破碎区（满足最大剪切强度）。



(a) Elastic-cracked-comminuted response



(b) Elastic-comminuted response

图 1 陶瓷靶板的响应区示意图

Fig. 1 Response regions in a ceramic target

1.2 扩容方程

破碎区陶瓷（处于颗粒/粉末态）的体积变化主要有两种机制：压缩机制（空穴崩塌）与膨胀机制（裂纹扩展）。体积膨胀还是压缩取决于由哪一种机制主导。传统的空穴膨胀理论通常采用线性压力-体变关系或不可压缩模型来描述破碎区的体积变化，这一处理方式只考虑了材料的压缩机制，而忽略了膨胀机制，从而难以准确描述破碎区的剪胀效应。因此，本文通过引入剪胀-运动学关系来精确描述陶瓷材料空穴膨胀过程中破碎区材料的体积变化。

基于脆性材料爆破实验的实验结果[22]，爆破区附近材料的体积应变率和剪切应变率之比可以近似为常数，即剪胀-运动学关系：

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial r}+\frac{2\upsilon}{r}=\psi\left(\frac{\upsilon}{r}-\frac{\partial \upsilon}{\partial r}\right) \tag{1}$$

式中 υ 为粒子速度，$\dot{\varepsilon}_{\mathrm{v}}=\partial\upsilon/\partial r+2\upsilon/r$ 为体应变率，$\dot{\gamma}=\upsilon/r-\partial\upsilon/\partial r$ 为剪切应变率，扩容系数 ψ 作为材料参数，其数值由靶体自身材料属性与外部载荷条件（体现为最大剪应力与平均静水压的比值）共同决定。积分上式，并取边界条件 $\upsilon(r_0,t)=V_0$。本文采用 Forrestal[3]使用过的相似变换的方法，取以下无量纲变量：

$$\xi=r/V_0t\,,\quad \xi_1=r/c_dt\,,\quad U=\upsilon/V_0\,,\quad U_1=\upsilon/c_d\,,\quad \beta=c_d/c_p\,,\quad \beta_1=c_c/c_p \tag{2a}$$

其中

$$c_p^2=K/\rho_0\,,\quad \varepsilon=V_0/c_d \tag{2b}$$

将无量纲粒子速度 U 和无量纲半径 ξ 代入可得破碎区的无量纲粒子速度为：

$$U=\xi^{-k} \tag{3a}$$

其中

$$k=\frac{2-\psi}{1+\psi} \tag{3b}$$

式中压缩系数 k 反映了材料处于不同状态: 当 $k=2$ 时，材料处于不可压缩状态；当 $k<2$ 时，材料处于膨胀状态；当 $k>2$ 时，材料处于压缩状态。

1.3 弹性-开裂-破碎响应

在欧拉坐标系中，球坐标形式的质量和动量守恒方程可以表示为：

$$\rho\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial r}+\frac{2\upsilon}{r}\right)=-\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}+\upsilon\frac{\partial \rho}{\partial r}\right) \tag{4a}$$

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r}+\frac{2\left(\sigma_r-\sigma_\theta\right)}{r}=-\rho\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial t}+\upsilon\frac{\partial \upsilon}{\partial r}\right) \tag{4b}$$

式中 σ_r 和 σ_θ 分别为径向和环向 Cauchy 应力。同时，弹性区和开裂区仍满足以下关系，即：

$$p=K\left(1-\rho_0/\rho\right) \tag{5a}$$

$$p=\frac{\sigma_r+\sigma_\theta+\sigma_\varphi}{3},\quad \sigma_\theta=\sigma_\varphi \tag{5b}$$

其中 p，ρ_0，ρ 和 K 分别是静水压力，材料变形前密度，材料变形后的密度和体积模量。

1.3.1 弹性区

根据 Forrestal 和 Tzou[3]的结果，弹性区和开裂区交界面上（弹性区一侧）的径向应力和粒子的无量纲速度可以分别表示为：

$$\sigma_{r4}=2f_t\left[\frac{(1-2\nu)+3\nu\left(\gamma\beta_1\right)^2-(1+\nu)\left(\gamma\beta_1\right)^3}{(1-2\nu)-3\left(\gamma\beta_1\right)^2+2(1+\nu)\left(\gamma\beta_1\right)^3}\right] \tag{6a}$$

$$\beta U_4=\frac{3(1+\nu)(1-2\nu)f_t\beta_1}{E}\left[\frac{1-\left(\gamma\beta_1\right)^2}{(1-2\nu)-3\left(\gamma\beta_1\right)^2+2(1+\nu)\left(\gamma\beta_1\right)^3}\right] \tag{6b}$$

式中

$$\gamma^2=\left(\frac{c_p}{c_e}\right)^2=\frac{1+\nu}{3(1-\nu)} \tag{6c}$$

$$c_e^2=\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho_0} \tag{6d}$$

式中 f_t，ν 和 c_e 分别为拉伸强度，泊松比和弹性波速。

1.3.2 开裂区

在弹性区和开裂区的交界面上，需要满足 Hugoniot 跳跃条件，即：

$$\sigma_{r3}+\rho_3\upsilon_3\left(\upsilon_3-c_d\right)=\sigma_{r4}+\rho_4\upsilon_4\left(\upsilon_4-c_d\right) \tag{7a}$$

$$\rho_3\left(\upsilon_3-c_d\right)=\rho_4\left(\upsilon_4-c_d\right) \tag{7b}$$

将式（6a）和（6b）代入到 Hugoniot 跳跃条件并进行相似变换，考虑到 f_t，$\sigma_r \ll K$ 后可以得到：

$$\sigma_{r3}=\sigma_{r4}+\frac{2f_t\left(\beta_1-\beta U_4\right)^2}{3-\left(\beta_1-\beta U_4\right)^2} \tag{8}$$

$$\beta U_3=\beta U_4+\frac{(2f_t/K)(\beta-\beta U_4)}{3-(\beta_1-\beta U_4)^2} \tag{9}$$

式中σ_{r3}和βU_3分别表示在弹性区和开裂区交界面上（开裂区一侧）的径向应力和粒子的无量纲速度。

在开裂区，材料只承受压缩径向应力，因此将线性压力-体变关系代入质量和动量守恒方程并进行相似变换再积分可得：

$$\sigma_r=\frac{A_t}{\beta\xi_1}+B_t\left[1+\frac{3}{(\beta\xi_1)^2}\right] \tag{10}$$

$$U(\xi_1)=-\frac{1}{2K\beta}\left[\frac{3}{A_t}+\frac{A_t}{(\beta\xi_1)^2}+\frac{4B_t}{\beta\xi_1}\right] \tag{11}$$

式中：

$$A_t=\frac{-6\beta_1^2\left[2\beta_1\sigma_{r3}+(\beta_1^2+3)K(\beta U_3)\right]}{(\beta_1^2-3)^2} \tag{12}$$

$$B_t=\frac{\beta_1^2\left[\sigma_{r3}(\beta_1^2+3)+6\beta_1K(\beta U_3)\right]}{(\beta_1^2-3)^2} \tag{13}$$

开裂区和破碎区交界面上（开裂区一侧）的边界条件满足$\xi_1=1$，$\sigma_r=f_c^{'}$（$f_c^{'}$为材料的抗压强度），将边界条件代入式（10）和式（11）可得：

$$\beta=\frac{A_t+\left[A_t^2+12B_t(f_c^{'}-B_t)\right]^{1/2}}{2(f_c^{'}-B_t)} \tag{14}$$

$$U_2=-\frac{(\beta^2+3)A_t}{6K\beta^3}-\frac{2B_t}{K\beta^2} \tag{15}$$

1.3.3 *破碎区*

求解空腔径向应力之前需要先确定破碎区的密度。将扩容方程（3a）得到的无量纲粒子速度代入质量守恒方程（4a）并整理可得破碎区的密度，即：

$$\rho(2-k)\xi^{-k-1}=-\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\xi^{-k}\frac{\partial\rho}{\partial r}\right) \tag{16}$$

根据相似变换可得$\frac{\partial f}{\partial t}=-\frac{r}{V_0t^2}\frac{df}{d\xi}$，$\frac{\partial f}{\partial r}=\frac{1}{V_0t}\frac{df}{d\xi}$，代入上式得：

$$(2-k)\frac{d\xi}{\xi^{k+2}-\xi}=\frac{d\rho}{\rho} \tag{17}$$

积分上式，得到破碎区密度的表达式，即：

$$\rho=\rho_x\left[1-\xi^{-1-k}\right]^{\frac{2-k}{1+k}} \tag{18a}$$

其中 ρ_x 为常数，当无量纲径向位置 $\xi=c_d/V$ 且 $k>0$ 时，上式可表示为：

$$\rho_x=\rho_1\left[1-\varepsilon^{1+k}\right]^{\frac{2-k}{1+k}} \tag{18b}$$

其中 ρ_1 为破碎区与开裂区交界面上（破碎区一侧）的材料密度。

（1）线性破碎区

根据材料是否达到最大剪切强度，可将破碎区进一步划分为线性破碎区和饱和破碎区。在线性破碎区，材料满足 Mohr-Coulomb 准则，即：

$$\sigma_r-\sigma_\theta=\tau_0+\lambda p \tag{19}$$

其中 τ，λ 为材料参数，通过对陶瓷的材料实验数据线性拟合得到，将式（5b）代入 Mohr-Coulomb 准则可得：

$$2\left(\sigma_r-\sigma_\theta\right)=\alpha\sigma_r+\alpha\tau_0/\lambda \tag{20a}$$

$$\alpha=\frac{6\lambda}{3+2\lambda} \tag{20b}$$

将上式与式（3a）代入动量守恒方程（4b）并进行相似变换可得：

$$\frac{d\sigma_r}{d\xi}+\frac{\alpha\sigma_r}{\xi}+\frac{\alpha\tau_0}{\lambda\xi}=-\rho V_0^2\frac{dU}{d\xi}\left(U-\xi\right) \tag{21}$$

在开裂区和线性破碎区交界面上，通过代入 Hugoniot 跳跃条件，即：

$$\sigma_{r2}+\rho_2\upsilon_2\left(\upsilon_2-c_d\right)=\sigma_{r1}+\rho_1\upsilon_1\left(\upsilon_1-c_d\right) \tag{22a}$$

$$\rho_2\left(\upsilon_2-c_d\right)=\rho_1\left(\upsilon_1-c_d\right) \tag{22b}$$

υ_1 表示交界面上线性破碎区一侧，由式（3a）确定；υ_2 表示开裂区一侧的粒子速度；ρ_1 是交界面上（线性破碎区一侧）的密度，由公式（18a）确定；ρ_2 是开裂区一侧的密度，由式（5a）得到。因此，将以上参数代入式（22a），即可求解得到开裂区和线性破碎区交界面上线性破碎区一侧的径向应力，即：

$$\sigma_{r1}=f_c^{'}+K\beta^2U_2\left(U_2-1\right)-\rho_x\left(1-\varepsilon^{1+k}\right)^{\frac{2-k}{1+k}}\left(\varepsilon^{2k}-\varepsilon^{k-1}\right)V_0^2 \tag{23}$$

将上式代入式（21）中可得线性破碎区的控制方程，即：

$$\frac{d\left(\sigma_r\xi^\alpha\right)}{d\xi}=-k\rho V_0^2\left(\xi^{-k+\alpha}-\xi^{-2k-1+\alpha}\right)-\frac{\alpha\tau_0}{\lambda}\xi^{\alpha-1} \tag{24}$$

将上式积分并将由扩容方程得到的密度公式（18a）代入可得到空穴表面的径向应力，即：

$$\sigma_n=\varepsilon^{-\alpha}\sigma_{r1}+k\rho_xV_0^2\int_1^{\frac{1}{\varepsilon}}\left(1-\xi^{-k-1}\right)^{\frac{2-k}{1+k}}\left(\xi^{-k+\alpha}-\xi^{-2k-1+\alpha}\right)d\xi+\frac{\alpha\tau_0}{\lambda}\int_1^{\frac{1}{\varepsilon}}\xi^{\alpha-1}d\xi \tag{25a}$$

$$\frac{\alpha\tau_0}{\lambda}\int_1^{\frac{1}{\varepsilon}}\xi^{\alpha-1}d\xi=\frac{\tau_0}{\lambda}\left(\varepsilon^{-\alpha}-1\right) \tag{25b}$$

式中 $\int_1^{\frac{1}{\varepsilon}}\left(1-\xi^{-k-1}\right)^{\frac{2-k}{1+k}}\left(\xi^{-k+\alpha}-\xi^{-2k-1+\alpha}\right)d\xi$ 可通过数值方法求解。

（2）饱和破碎区

当材料达到最大剪切强度时，破碎区内部形成线性-饱和破碎响应。假设线性破碎区和饱和破碎区交界面处的无量纲径向位置 $\xi=\delta$，此时 Mohr-Coulomb 准则可表示为：

$$\sigma_r-\sigma_\theta=\tau_{\max} \tag{26a}$$

$\tau_{\max}$ 为材料的最大剪切强度，同时在 $\xi=\delta$ 处的径向应力为：

$$\sigma_r=\frac{2\tau_{\max}}{\alpha}-\frac{\tau_0}{\lambda} \tag{26b}$$

代入动量守恒方程（4b）可得饱和破碎区的控制方程，即：

$$\frac{d\sigma_r}{d\xi}+\frac{2\tau_{\max}}{\xi}=-\rho V^2\frac{dU}{d\xi}\left(U-\xi\right) \tag{27}$$

代入根据扩容方程得到的密度公式（18a），积分可得最终的空穴表面的径向应力，即：

$$\sigma_n=\frac{2\tau_{\max}}{\alpha}-\frac{\tau_0}{\lambda}+k\rho_x V_0^2\int_1^{\delta}\left(1-\xi^{-k-1}\right)^{\frac{2-k}{1+k}}\left(\xi^{-k}-\xi^{-2k-1}\right)d\xi+2\tau_0\int_1^{\delta}\xi^{-1}d\xi \tag{28a}$$

式中 $\int_1^{\delta}\left(1-\xi^{-k-1}\right)^{\frac{2-k}{1+k}}\left(\xi^{-k}-\xi^{-2k-1}\right)d\xi$ 通过数值方法求解，同时：

$$2\tau_{\max}\int_1^{\delta}\xi^{-1}d\xi=2\tau_{\max}\ln\delta \tag{28b}$$

通过联立线性破碎区的径向应力公式（25）和上式，可以通过数值方法求解得到 δ 值，即：

$$\left(\frac{2\tau_{\max}}{\alpha}-\frac{\tau_0}{\lambda}\right)\delta^{\alpha}=\varepsilon^{-\alpha}\sigma_{r1}+k\rho_x V_0^2\int_{\delta}^{\frac{1}{\varepsilon}}\left(1-\xi^{-k-1}\right)^{\frac{2-k}{1+k}}\left(\xi^{-k+\alpha}-\xi^{-2k-1+\alpha}\right)d\xi+\frac{\alpha\tau_0}{\lambda}\int_{\delta}^{\frac{1}{\varepsilon}}\xi^{\alpha-1}d\xi \tag{29}$$

当破碎区所有区域都达到最大剪切强度时，即 $\delta=1/\varepsilon$，线性破碎区消失；当破碎区未达到最大剪切强度时，即 $\delta=1$，饱和破碎区还未产生，此时通过式（25）即可求解得到空穴表面的径向应力；而当 $1<\delta<1/\varepsilon$ 时，破碎区内部可划分为线性破碎区和饱和破碎区，破碎区内形成线性-饱和破碎响应。

综上所述，空腔表面径向应力的求解遵循以下步骤：首先，对于给定的 β_1，由式（6）得到 σ_{r4} 和 βU_4；然后代入到式（8）和（9）得到 σ_{r3} 和 βU_3；再代入到式（12）和（13）得到 A_t 和 B_t；再将其代入到式（14）和（15）得到 β 和 U_2；然后代入到式（23）和（2b）得到 σ_{r1} 和 ε；最后代入到式（29）求得 δ 值并通过式（25）或（28）最终求出空腔表面的径向应力。

为验证 β_1 取值的正确性，本文利用尚未使用过的式（22b）来检验计算结果。对式（22b）进行相似变换可得：

$$\rho_1\left(\frac{\varepsilon^{1+k}}{\xi_1^k}\right)=\rho_2\left(U_2-1\right) \tag{30}$$

开裂区和破碎区交界面上的边界条件为 $\xi_1=1$，因此可以求得：

$$U_2 = 1-\left(1-\varepsilon^{k+1}\right)^{\frac{3}{k+1}} \tag{31}$$

通过对比式（31）和式（15）所给出的无量纲速度U_2，可以评估解的收敛性。当二者之间的差值满足预设的精度要求时，则认为获得了最终结果，即确定了空腔表面的径向应力值。

1.4 弹性-破碎响应

当空腔膨胀的速度继续增大并超过某一临界值时，开裂区会消失，靶体材料内部形成弹性-破碎响应。此时，弹性区与破碎区直接相邻，在交界面上有$\xi_1=1$。

已知在弹性区内，通过广义胡克定律可以得到：

$$\sigma_r = -\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\frac{\partial u}{\partial r}+2\nu\frac{u}{r}\right] \tag{32a}$$

$$\sigma_\theta = -\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\nu\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}\right] \tag{32b}$$

式中u是粒子速度，ν是泊松比，将方程代入到动量守恒方程式（4b）并引入无量纲变量$\bar{u}=\frac{u}{ct}$，$\beta_2=\frac{c_d}{c_e}$可得：

$$\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\xi_1^2}+\frac{2}{\xi_1}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\xi_1}-\frac{2\bar{u}}{\xi_1^2}=\beta_2^2\xi_1\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\xi_1^2} \tag{33}$$

积分上式可得：

$$\bar{u}=C_t\beta_2\xi_1-D_t\left(1-\frac{1-3\beta_2^2\xi_1^2}{3\beta_2^2\xi_1^2}\right) \tag{34}$$

由未扰动区和弹性区界面的边界条件可得$\xi_1=1/\beta_2$时$\bar{u}=0$，代入上式可得：

$$C_t=-\frac{2}{3}D_t \tag{35}$$

材料在弹性区与线性破碎区的交界面处两侧的力学行为可同时由 Mohr-Coulomb 准则描述，且在交界面上$\xi_1=1$，因此将式（34）和（35）代入到式（20）可得：

$$C_t=\frac{6(1+\nu)(1-2\nu)\beta_2^2\tau_0}{E(3+2\lambda)(1-\beta_2)\left[(1-2\nu)(3-\alpha)(1+\beta_2)-(1+\nu)\beta_2^2\alpha\right]} \tag{36}$$

将粒子的速度和位移关系$\upsilon\left(1-\frac{\partial u}{\partial r}\right)=\frac{\partial u}{\partial t}$代入到式（34）并进行相似变换可得：

$$U_1=\frac{\bar{u}-\xi\dfrac{d\bar{u}}{d\xi_1}}{1-\dfrac{d\bar{u}}{d\xi_1}}=\frac{C_t\beta_2\xi_1-D_t\left(\dfrac{1-3\beta_2^2\xi_1^2}{3\beta_2^2\xi_1^2}\right)-\xi_1\left(C_t\beta_2+\dfrac{2D_t}{3\beta_2^2\xi_1^3}\right)}{1-\left(C_t\beta_2+\dfrac{2D_t}{3\beta_2^2\xi_1^3}\right)} \tag{37}$$

当$\xi_1=1$时，将式（35）代入到上式即可得交界面上弹性区一侧的无量纲粒子速度为：

$$U_4=\frac{3\left(1-\beta_2^2\right)C_t}{2\beta_2^2+2\left(1-\beta_2\right)C_t} \tag{38}$$

本文将式（23）和（2b）中得到的σ_{r1}和ε代入到式（28）和式（29）求得δ值和空腔表面的径向应力。同时在弹性-破碎响应中用式（38）得到的U_4来代替原式中的U_2，此时$\beta=\beta_2\left(c_e/c_p\right)$，并且用式（31）给出的无量纲速度来验证$U_4$的取值。即可确定靶体材料内部形成弹性-破碎响应时空腔表面的径向应力。

2 球形空穴膨胀的数值模拟

为验证前述理论模型，数值模拟方法被用于分析陶瓷材料中的动态球形空穴膨胀过程。通过采用新近提出的陶瓷动态本构模型[23,24]用于模拟 AD995 陶瓷在不同扩张速度下空腔的膨胀过程，该本构模型综合考虑了压力依赖性、Lode 角、应变率效应、剪切损伤和拉伸破坏，并引入了一个新的状态方程。该动态本构模型和有限元模型的简要描述如下。

2.1 材料模型

2.1.1 状态方程

陶瓷材料的状态方程可以写成：

$$p\left(\rho,e\right)=\gamma_s'\rho e+\frac{K_1u_v+K_2u_v^2+K_3u_v^3}{1+f\left(u_v\right)}\left[1-\frac{1}{2}\gamma_s'\left(\frac{\rho}{\rho_0}-1\right)\right] \tag{39}$$

式中K_1、K_2和K_3为常数，K_1为弹性体积模量，e和u_v分别是材料的比内能和体积应变，γ_s'是 Gruneisen 系数，$\gamma_s'=\rho_0\gamma_{00}/\rho$，式中$\gamma_{00}$为实体材料在自然状态下的 Gruneisen 系数。$f\left(u_v\right)$是体积应变的函数，可表示为：

$$f\left(u_v\right)=\begin{cases}0 & p\le p_{HEL}\\ a\left(u_v-u_{vHEL}\right)^m\exp\left[b\left(u_v-u_{vHEL}\right)\right] & p>p_{HEL}\end{cases} \tag{40}$$

式中u_{vHEL}表示达到 HEL 时所对应的体积应变，a、b和m为常数。将式（42）代入式（41）中，重新排列可以得到陶瓷材料的状态方程，即：

$$p(u_v,e)=\begin{cases}\rho_0\gamma_{00}e+\left(K_1u_v+K_2u_v^2+K_3u_v^3\right)\left[1-\dfrac{\gamma_{00}u_v}{2(u_v+1)}\right] & p\le p_{HEL}\\ \rho_0\gamma_{00}e+\dfrac{K_1u_v+K_2u_v^2+K_3u_v^3}{1+a(u_v-u_{vHEL})^m\exp\left[b(u_v-u_{vHEL})\right]}\left[1-\dfrac{\gamma_{00}u_v}{2(u_v+1)}\right] & p>p_{HEL}\end{cases} \tag{41}$$

2.1.2 强度面

陶瓷的动态强度面可以写成：

$$Y=\begin{cases}3(p+f_{tt})r(\theta,e) & p<0\\ \left[3f_{tt}+(f_{cc}-3f_{tt})\times 3p/f_{cc}\right]r(\theta,e) & 0<p<f_c/3\\ \left[f_{cc}+Bf_c\tanh\left(p/f_c-f_{cc}/(3f_c)\right)\right]r(\theta,e) & p>f_c/3\end{cases} \tag{42}$$

式中，Y 为剪切强度；f_{tt} 和 f_{cc} 分别表示陶瓷无围压动态压缩和拉伸强度；$r(\theta,e)$ 为 Lode 角效应；B 为材料常数，通过三轴压缩准静态试验确定；同时提出了拉伸和压缩的“S”形应变率曲线。其中拉伸增强因子可写成以下形式：

$$\psi_t=\frac{f_{tt}}{f_t^{'}}=(F_m-W_y)\tanh\left[S\left(\log\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0}\right)-W_x\right]+W_y \tag{43}$$

式中 W_x、W_y、F_m 和 S 为待定常数；$\dot{\varepsilon}_0=1s^{-1}$。假定在相同的应变率下，应变率效应引起的拉伸强度的增量等于压缩强度的增量。则仅受到应变率效应影响的压缩动态增强因子 ψ_c 可写成以下形式：

$$\psi_c=(\psi_t-1)f_t^{'}/f_c^{'}+1 \tag{44}$$

令 f_{tt}=0 和 $f_{cc}=f_c^{'}\times r$，残余强度面可以从式（44）中得到，即：

$$Y=\begin{cases}3p\times r(\theta,e) & 0<p\le f_c^{'}\times r/3\\ \left[f_c^{'}\times r+Bf_c^{'}\tanh\left(p/f_c^{'}-r/3\right)\right]\times r(\theta,e) & p>f_c^{'}\times r/3\end{cases} \tag{45}$$

式中 r 为常数，$f_c^{'}\times r$ 为在准静态无围压压缩下的残余强度。

表 1 给出了 AD995 陶瓷在当前动态本构模型中的材料参数。限于篇幅，有关上述陶瓷动态本构模型的更多细节，感兴趣的读者请参考文献[23,24]。

2.2 有限元模型

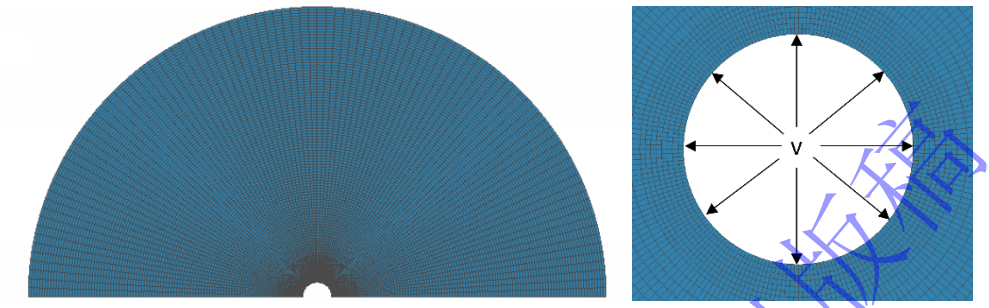
本文通过采用数值模拟的方法对材料的空穴膨胀过程进行分析[25]，通过直接引入复杂的本构模型来更加精确地描述材料的力学行为，可以得到更加可靠的空腔表面径向应力数据。建立的球形空穴膨胀有限元模型如图 2（a）所示。模型几何上为一个内、外半径分别为 0.5 m 与 10 m 的半圆环域。利用模型的球对称性，采用二维轴对称单元进行离散。为模拟空腔的稳定扩张，在其内表面所有节点上施加了恒定的径向速度边界条件，以此表征空腔表面以速度 V 向外扩展，如图 2（b）所示。

表 1 AD995 陶瓷在当前材料模型的各种参数值

Table 1 Various parameter values in the current model for AD995 ceramic

Equation of state	K_1(GPa)	K_2(GPa)	K_3(GPa)	a	m	b
	239.0	-29.53	1142	-2503	1.796	-179.8
Strength surface	$f_c^{'}$(GPa)	f_t(GPa)	B	υ		

	2.6	0.22	1.6	0.23	
Strain rate effect	F_m	W_x	W_y	S	$\dot{\varepsilon}_0$ (s^{-1})
	3	3.2	2	1.25	1
Shear damage	l	r	λ_m	λ_s	
	0.6	0.3	0.3	7.5	
Tensile damage	c_1	c_2	ε_{frac}		
	3	6.93	0.02		



(a) Overall view of the model(b)Enlarged view of the cavity region

图 2 球形空穴膨胀有限元模型

Fig. 2 Finite element (FE) model for spherical cavity expansion

通过使用上述新近开发的陶瓷动态本构模型作为数值模拟空穴膨胀过程的计算本构模型，以AD995 氧化铝陶瓷为例，空腔的扩张速度分别为150m/s、300m/s、450m/s、600m/s、750m/s、900m/s。数值模拟所得到的空腔表面径向应力和开裂区与破碎区的边界速度将与前文建立的理论模型数值计算结果进行比较。

2.3 网格敏感性分析

为了确保数值模拟结果的准确性与独立性，避免因网格划分的尺寸对空腔表面径向应力的模拟结果产生较大影响，本文进行了网格敏感性分析，旨在确定一个既能保证计算精度又能兼顾计算效率的网格方案。

通过采用不同尺寸组合的网格方案对扩张速度为 600m/s 时的空腔膨胀过程进行数值模拟，图 3 给出了空腔径向应力随时间变化曲线（空腔径向应力-时间历程）。从图 3 可以看出数值模拟得到的空腔表面的径向应力在时间较小时出现一定幅度的振荡，随着时间增大趋于一稳定值；从图 3 还可以看出$1.5mm\times2.5mm$和$1.5mm\times1.5mm$单元尺寸得到的空腔径向应力-时间历程几乎相同；另外，不同尺寸组合的网格方案对稳定后空腔径向应力的取值影响很小，网格径向长度达到$4.5mm$时的收敛时间相对较长。因此，本文综合考虑了计算精度和计算效率之后，在数值模拟中采取$1.5mm\times2.5mm$尺寸的网格来计算空腔径向应力。

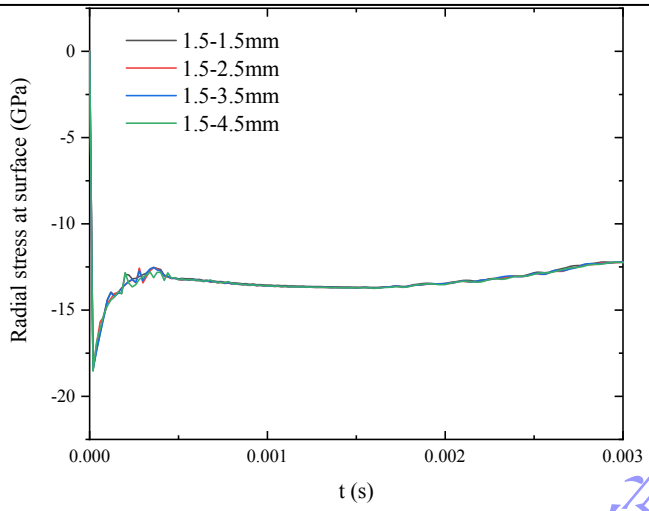


图 3 不同网格尺寸方案的空腔径向应力-时间历程

Fig. 3 Cavity radial stress-time histories for various mesh sizes

3 结果和讨论

3.1 本构参数的确定

下面将呈现前文的动态球形空穴膨胀模型的数值结果。首先需要确定陶瓷材料服从 Mohr-Coulomb 强度准则下的相关参数。通过对各种陶瓷的材料实验进行分析，可以得到陶瓷材料的压力-体变关系（强度面），如图 4 所示。由图 4 中的实验数据拟合可得 Mohr-Coulomb 准则下的本构参数，即 $\tau_0 = 0.6 f_c^{'}$，$\lambda = 1.1$ $\tau_{\max} = 2.28 f_c^{'}$。

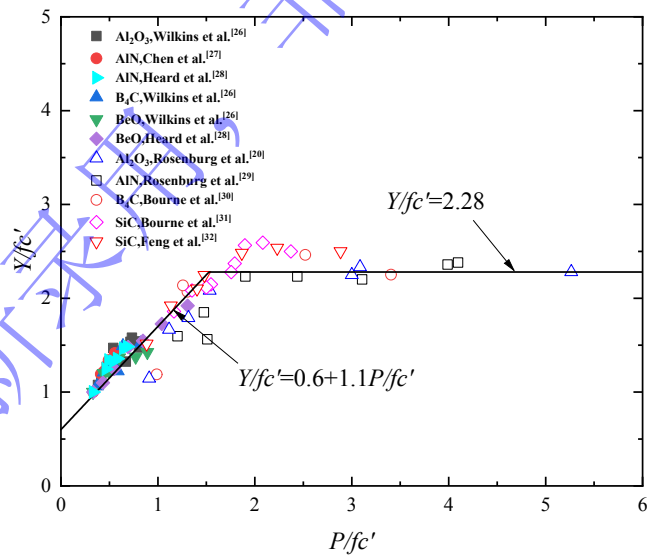


图 4 特定参数下 Mohr-Coulomb 强度面与陶瓷实验数据的比较

Fig. 4 Comparison of the Mohr-Coulomb strength surface under specific parameters with the ceramics experimental data

3.2 空腔径向应力

本文对 AD995 陶瓷在给定扩张速度下的空穴膨胀过程进行数值模拟，图 5 给出了空腔表面径向应力的数值模拟结果与模型预测结果的比较，可以得到当压缩系数 $k = 1.7$ 时，数值模拟与理论模型的预测结果吻合良好。因此我们取陶瓷材料的压缩系数 k 值为 1.7，即破碎区存在剪胀效应（

$k<2$）。图 5 也给出了本文理论模型与 Satapathy 提出的模型[13]关于空腔径向应力预测的比较，可以看出当空腔膨胀速度为 0 时，两个模型对空腔径向应力（即靶板静阻力）的预测值比较吻合；随着空腔膨胀速度的增大，在相同空腔膨胀速度下，本文理论模型预测的空腔表面径向应力系统地高于 Satapathy 模型的预测结果。这一差异主要由以下因素造成的：Satapathy 将破碎区材料简化为不可压缩关系，忽略了材料发生剪胀效应；并假设材料完全破碎而采用陶瓷材料在残余强度面的 Mohr-Coulomb 准则参数，从而低估了空穴膨胀所需的空腔径向应力。

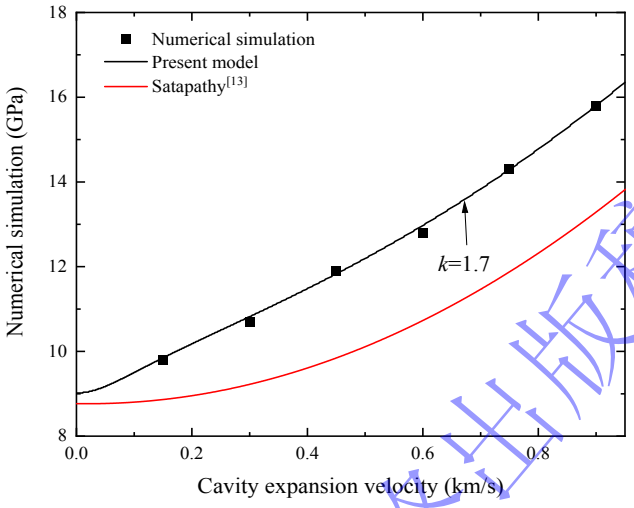


图 5 空腔表面径向应力数值模拟与理论预测结果的比较

Fig. 5 Comparison of radial stress at the cavity surface by present model predictions with the numerical simulation

图 6 给出了 $k=1.7$ 时 AD995 陶瓷空腔径向应力的理论预测结果与拟合曲线，其满足二次函数关系，即：

$$\sigma_n = a_0 + a_1 V + a_2 V^2 \tag{48}$$

其中 a_0，a_1 a_2 为拟合常数。根据文献[13]，AD995 氧化铝陶瓷的单轴压缩强度 $f_c^{'}=2.62GPa$，体积模量 $K=231.8GPa$，弹性模量 $E=373GPa$，拉伸强度 $f_t=0.26GPa$，密度 $\rho_0=3890kg/m^3$，泊松比 $\nu=0.23$，最大剪切强度 $\tau_0=2.28f_c^{'}=5.928GPa$。对 AD995 陶瓷空腔应力的理论计算结果进行曲线拟合，可以得到 $a_0=8.83\times10^9$，$a_1=6.05\times10^6$，$a_2=1.84\times10^3$。

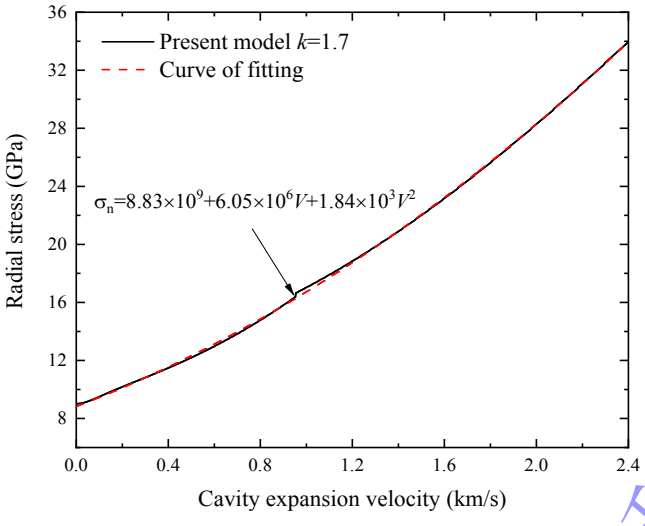


图 6 k = 1.7 时空腔径向应力与空穴膨胀速度关系和拟合曲线

Fig. 6 Relationship between radial stress at the cavity surface and cavity expansion velocity with k = 1.7

3.3 开裂区与破碎区的边界速度

图 7 为压缩系数 k =1.7 时，理论计算得到的开裂区与破碎区的边界速度与数值模拟结果的比较，图中也给出了 Satapathy 模型的预测结果。可以发现，当扩张速度比较低时，材料内部形成弹性-开裂-破碎响应；而随着扩张速度的增大，破碎区的边界速度逐渐逼近开裂区的边界速度。最终开裂区会被破碎区替代，材料内部转变为弹性-破碎响应。从图 7 可以看出，当 k =1.7 时，理论预测的开裂区与破碎区的边界速度与数值模拟结果吻合较好，当膨胀速度较大时 Satapathy[13]的理论预测的破碎区边界速度小于数值结果。从图 7 也可以看出，开裂区与破碎区的边界速度在空腔膨胀速度为 954m/s 时交汇，当前模型预测与 Satapathy[13]的理论预测结果也比较一致。

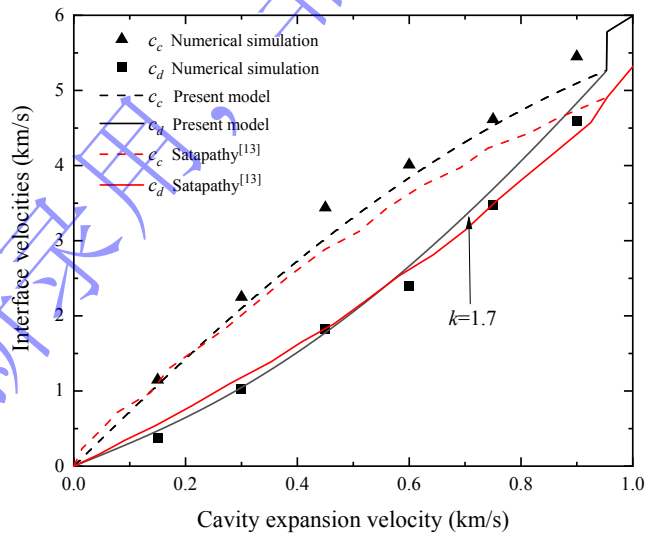
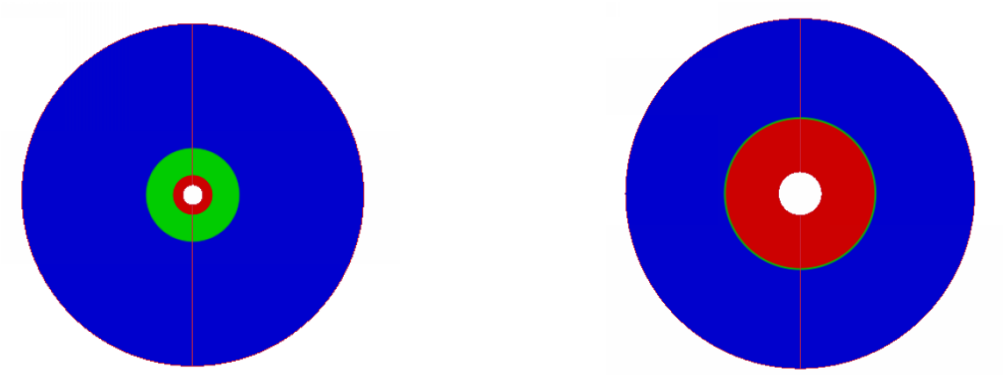


图 7 k = 1.7 时开裂区与破碎区的边界速度与数值模拟结果的比较

Fig. 7 Comparison of the boundary velocity of c_d and c_c with the numerical simulation results with k = 1.7

图 8 通过数值模拟直观呈现了陶瓷球形空穴膨胀过程中的响应区演化。各响应区颜色标识如下：白色代表空腔，红色为破碎区，绿色对应开裂区，蓝色表示弹性区。可以清晰看到，破碎区范围随着空穴膨胀速度的增加而显著增大，而开裂区范围则相对缩小。当速度达到 1000 m/s 时，开裂区近乎完全消失。这一观测现象与前文理论模型的预测结果比较吻合。



(a) 300m/s　　(b) 1000m/s

图 8 模型不同空穴膨胀速度的响应区情况

Fig. 8 The response region conditions of different cavity expansion speeds in the model

3.4 材料参数对空腔径向应力的影响

相同陶瓷的材料参数（如抗压强度、密度等）并非一个确定值，这些参数会因其制备工艺的差异（如烧结温度与时间、原料粉末纯度、致密化程度等）而发生变化。因此，讨论合理范围内参数变化对空腔径向应力的影响对提高陶瓷抗侵彻性能具有一定现实意义。下面系统性地讨论多种靶板材料参数（抗压强度、体积模量、泊松比、拉伸强度、密度）对空腔径向应力以及靶板静阻力 a_0 的影响规律。以 AD995 陶瓷为例，图 9 给出了特定材料参数单独变化时（增幅 50%）对空腔径向应力的影响。在理论计算中，取扩容系数 $k=1.7$ 。

由图 9（a）可以得到：抗压强度提高 50%，当空腔膨胀速度为 0 m/s、400 m/s 和 800 m/s 时空腔径向应力分别提高了 38.1%、37%和 30%。结果表明抗压强度对空腔径向应力具有显著影响，尤其是对靶板静阻力 a_0 的影响最为显著。

由图 9（b）可以得到：体积模量提高 50%，当空腔膨胀速度为 0 m/s、400 m/s 和 800 m/s 时空腔径向应力分别提高 6.2%、4.5%和 4.2%。结果表明体积模量对空腔径向应力与靶板静阻力 a_0 的影响比较显著，尤其对 a_0 的影响更为突出。

由图 9（c）可以得到：泊松比提高 50%，当空腔膨胀速度为 0 m/s、400 m/s 和 800 m/s 时空腔径向应力分别下降 3.4%、1.8%和 1.2%。结果表明泊松比对空腔径向应力的影响较小，且影响随着空穴膨胀速度的增大而减小，在较高的膨胀速度下可以忽略不计。

由图 9（d）可以得到：拉伸强度提高 50%，当空腔膨胀速度为 0 m/s、400 m/s 和 800 m/s 时空腔径向应力分别提高 3%、0.9%和 0.3%。结果表明拉伸强度对空腔径向应力的影响很小，且影响随着空穴膨胀速度的增大而减小，在较高的膨胀速度下可以忽略不计。

由图 9（e）可以得到：密度提高 50%，当空腔膨胀速度为 0 m/s、400 m/s 和 800 m/s 时空腔径向应力分别提高 0.1%、4.5%和 11%。结果表明密度对 a_0 几乎没有影响，但对空腔径向应力的影响随着空穴膨胀速度的增大而明显增大，在较高的膨胀速度下密度对空腔径向应力的影响较为显著。

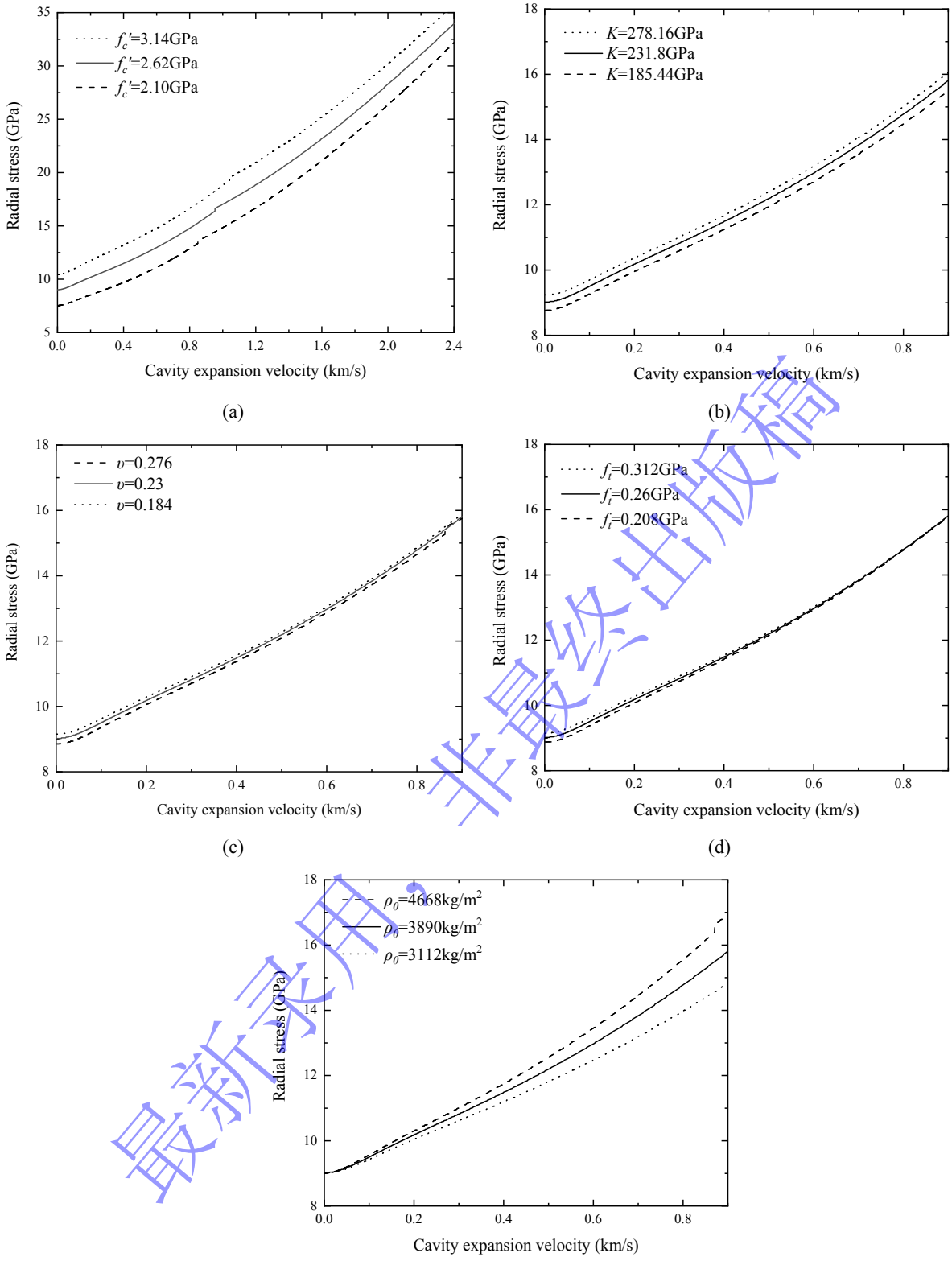


图 9 各种靶板参数对空腔径向应力的影响(a) 抗压强度 f_c'；(b) 拉伸强度 f_t；(c) 体积模量 K；(d) 泊松比 υ；(e) 密度 ρ_0

Fig. 9 Influences of various target parameters on radial stress at the cavity surface(a) Compressive strength f_c'；(b) Tensile strength f_t；(c) Bulk modulus K；(d) Poisson's ratio υ；(e) Density ρ_0

4 结　论

本文通过引入剪胀-运动学关系，提出了考虑剪胀效应的陶瓷球形空穴膨胀模型。破碎区采用Mohr-Coulomb 强度准则后根据其是否达到最大剪切强度，进一步划分为线性破碎区和饱和破碎区，得到了计算空腔表面径向应力的方程和数值解，分析了抗压强度、密度等参数对空腔径向应力的影响。同时，使用新近开发的陶瓷动态本构模型数值模拟了 AD995 陶瓷在不同扩张速度下的空穴膨胀过程，将模型预测的空腔径向应力和开裂区破碎区边界速度与数值模拟结果进行了比较。主要结论如下：

（1）模型预测的空腔径向应力、开裂区和破碎区界面速度与数值模拟结果吻合良好；空腔径向应力随膨胀速度的增大而增大。

（2）理论模型和数值模拟皆表明，当空穴膨胀速度超过一定值时破碎区边界速度会超过开裂区边界速度，开裂区消失。

（3）研究发现陶瓷的抗压强度对空腔径向应力起主导性作用，密度对空腔径向应力的影响随空腔膨胀速度的增加而增加。

参考文献

[1] LUK V K, FORRESTAL M J. Penetration into semi-infinite reinforced-concrete targets with spherical and ogival nose projectiles [J]. International Journal of Impact Engineering, 1987, 6(4): 291-301.

[2] XU Y, KEER L M, LUK V K. Elastic-cracked model for penetration into unreinforced concrete targets with ogival nose projectiles [J]. International Journal of Solids and Structures, 1997, 34(12): 1479-1491.

[3] FORRESTAL M J, TZOU D Y. A spherical cavity-expansion penetration model for concrete targets [J]. International Journal of Solids and Structures, 1997, 34(31-32): 4127-4146.

[4] HE T, WEN H M, GUO X J. A spherical cavity expansion model for penetration of ogival-nosed projectiles into concrete targets with shear-dilatancy [J]. Acta Mechanica Sinica, 2011, 27(6): 1001-1012.

[5] XU H, WEN H M. A Spherical Cavity Expansion Penetration Model for Concrete Based on Hoek–Brown Strength Criterion [J]. International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 2012, 13(2): 145-152.

[6] KONG X Z, WU H, FANG Q, et al. Rigid and eroding projectile penetration into concrete targets based on an extended dynamic cavity expansion model [J]. International Journal of Impact Engineering, 2017, 100: 13-22.

[7] FENG J, LI W, WANG X, et al. Dynamic spherical cavity expansion analysis of rate-dependent concrete material with scale effect [J]. International Journal of Impact Engineering, 2015, 84: 24-37.

[8] DENG Y J, CHEN X W, SONG W J. Dynamic cavity-expansion penetration model of elastic-cracked-crushed response for reinforced-concrete targets [J]. International Journal of Impact Engineering, 2021, 157: 103981.

[9] PU B, WANG X, LI W, et al. Analytical Model Formulation of Steel Plate Reinforced Concrete Walls against Hard Projectile Impact [J]. Applied Sciences, 2022, 12(1): 518.

[10] FORRESTAL M J, LONGCOPE D B. Target strength of ceramic materials for high-velocity penetration [J]. Journal of Applied Physics, 1990, 67(8): 3669-3672.

[11] SATAPATHY S, BLESS S. Calculation of penetration resistance of brittle materials using spherical cavity expansion analysis [J]. Mechanics of Materials, 1996, 23(4): 323-330.

[12] SATAPATHY S S, BLESS S J. Cavity expansion resistance of brittle materials obeying a two-curve pressure-shear behavior [J]. Journal of Applied Physics, 2000, 88(7): 4004-4012.

[13] SATAPATHY S. Dynamic spherical cavity expansion in brittle ceramics [J]. International Journal of Solids and Structures, 2001, 38(32): 5833-5845.

[14] BAVDEKAR S, PARSARD G, SUBHASH G, et al. An improved dynamic expanding cavity model for high-pressure and high-strain rate response of ceramics [J]. International Journal of Solids and Structures, 2017, 125: 77-88.

[15] BAVDEKAR S, SUBHASH G, SATAPATHY S. A unified model for dwell and penetration during long rod impact on thick ceramic targets [J]. International Journal of Impact Engineering, 2019, 131: 304-316.

[16] WANG Z, LI P. A model incorporating damage evolution to predict the penetration behavior of a ceramic target subjected to the long projectile impact [J]. International Journal of Impact Engineering, 2020, 135: 103393.

[17] 王明洋,郑大亮,钱七虎. 弹体对混凝土介质侵彻、贯穿的比例换算关系 [J]. 爆炸与冲击, 2004, 24(2): 108-114.
Wang, M.Y., Zhen,D.L., Qian, Q.H.: The scaling problems of penetration and perforation for projectile into concrete media[J]. Chinese Journal of Explosion and Shock Waves, 2004, 24(2): 108-114.

[18] CHEN I W, MOREL P E R. Implications of Transformation Plasticity in ZrO2-Containing Ceramics: I, Shear and Dilatation Effects [J]. Journal of the American Ceramic Society, 1986, 69(3): 181-189.

[19] STAM G Th, VAN DER GIESSEN E. Analysis of supercritical transformation with dilatation and shear effects during crack growth in ceramics [M]. Dordrecht: Springer Netherlands, 1993: 137-146.

[20] ROSENBERG Z, YAZIV D, YESHURUN Y, et al. Shear strength of shock-loaded alumina as determined with longitudinal and transverse manganin gauges [J]. Journal of Applied Physics, 1987, 62(3): 1120-1122.

[21] CHEN W, RAVICHANDRAN G. Failure mode transition in ceramics under dynamic multiaxial compression [J]. International Journal of Fracture, 2000, 101(1): 141-159.

[22] NIKOLAEVSKIJ V N. Mechanics of Porous and Fractured Media : Vol.8[M]. World Scientific, 1990.

[23] RUITAO T, LIUYUN X, HEMING W, et al. A Macroscopic Dynamic Constitutive Model for Ceramic Materials [J]. Chinese Journal of High Pressure Physics, 2020, 34(4): 89.

[24] WANG Z H, WEN H M, ZHANG Y L, et al. An improved dynamic constitutive model for ceramics [J]. International Journal of Impact Engineering, 2025, 197: 105180.

[25] WARREN T L, FOSSUM A F, FREW D J. Penetration into low-strength (23MPa) concrete: target characterization and simulations [J]. International Journal of Impact Engineering, 2004, 30(5): 477-503.

[26] WILKINS M L, CLINE C F, HONODEL C A. Fourth progress report of light armor program : No. UCRL-50694 [R]. California Univ., Livermore: Lawrence Radiation Lab., 1969.

[27] CHEN W, RAVICHANDRAN G. Static and Dynamic Compressive Behavior of Aluminum Nitride under Moderate Confinement [J]. Journal of the American Ceramic Society, 1996, 79(3): 579-584.

[28] HEARD H C, CLINE C F. Mechanical behaviour of polycrystalline BeO, Al2O3 and AlN at high pressure [J]. Journal of Materials Science, 1980, 15(8): 1889-1897.

[29] ROSENBERG Z, BRAR N S, BLESS S J. Dynamic high-pressure properties of AlN ceramic as determined by flyer plate impact [J]. Journal of Applied Physics, 1991, 70(1): 167-171.

[30] BOURNE N K. Shock–induced brittle failure of boron carbide [J]. Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 2002, 458(2024): 1999-2006.

[31] BOURNE N, MILLETT J, PICKUP I. Delayed failure in shocked silicon carbide [J]. Journal of Applied Physics, 1997, 81(9): 6019-6023.

[32] FENG R, RAISER G F, GUPTA Y M. Material strength and inelastic deformation of silicon carbide under shock wave compression [J]. Journal of Applied Physics, 1998, 83(1): 79-86.

A Dynamic Spherical Cavity Expansion Model for Ceramics Considering Shear-Dilatancy

LI Xiao, LIANG Xuan, WEN Heming

（*CAS Key Laboratory for Mechanical Behavior and Design of Materials, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, Anhui, China*）

Abstract: The cavity expansion theory is often used to predict the penetration resistance of a target against a projectile. A dynamic spherical cavity expansion model for ceramic materials is suggested by considering shear-dilatancy effect through introducing a dilatancy-kinematic relation in comminuted region. The comminuted region is further divided into a linear comminuted region (satisfying the Mohr-Coulomb failure criterion) and a saturated comminuted region (satisfying the maximum shear strength), depending on whether the shear strength reaches its maximum (plateau). Firstly, equations for calculating radial stress at cavity surface are derived. Secondly, numerical simulations of cavity expansion process in ceramics at different expansion velocities are conducted. Finally, the effects of key parameters such as compressive strength and density on the cavity surface radial stress are discussed. It is shown that the model predictions for cavity radial stress and interface velocities of cracked and comminuted regions are in good agreement with numerical simulations. It is also shown that compressive strength plays a dominant role in enhancing cavity radial stress and the influence of density increases with increasing cavity expansion velocity.

Keywords: spherical cavity expansion; ceramics; theoretical model; resistance function; numerical simulation