第10卷 第2期 高 压 物 理 学 报 Vol. 10, No. 2
1996年6月 CHINESE JOURNAL OF HIGH PRESSURE PHYSICS June, 1996

几种断裂问题的分形描述中几个问题的商榷*

高 峰 谢和平
(中国矿业大学数力系,徐州 221008)

摘要 分形几何能够定量化地描述自然界中各类极不规则的复杂现象,在各个科学领域都得到了广泛的应用。但是人们发现许多实验产生自相矛盾的结果,于是从分形域、码尺相关性、自仿射分形、多重分形等角度进行了探讨。但是作者发现许矛盾的结果来源于人们对分形及物理力学定义的简单甚至错误理解,为此就一些问题进行了较详细的阐述。

关键词 分形 断裂韧性 临界裂纹扩展力 裂纹分叉增韧
中图法分类号 O346.1

1 引 言

分形几何是1982年由 Mandelbrot 所创建的一门新的数学分支,它的产生源于两个数学问题,一个是函数的可微性问题,另一个是维数问题,它的基本概念是分数维数,数字特征是幂律关系,几何特征是自相似性,它适合于描述自然界不规则的、杂乱无章的复杂现象,并提供了定量化的描述方法。

类维生和陈丙森同志所撰写的"几种断裂问题的分形描述"一文(后称文献[1]),对近年来分形概念在材料断裂问题中的应用作了较为全面的回顾和总结,阐述了一些分形与断裂方面值得深入探讨的问题,并提出了一些与以往工作结果相反的观点与结论,但是我们发现,文章在一些方面存在着概念性错误,作者将就这些问题与各位专家同行共同商榷。

2 论临界裂纹扩展力的分形描述

对于单位厚度裂纹体,记裂纹的直线路径长度和不规则曲线路径欧氏长度分别为 a_0 和 a_f,设裂纹剖线的 Hausdorff 维数为 D,由分形的基本定义[2]有

$$a_f = a_0 \varepsilon^{1-D} \tag{1}$$

式中 $\varepsilon \leqslant 1$ 为标度,对于确定的分形体,它是结构的内禀几何量。

根据断裂力学[3],对于单位厚度裂纹,临界裂纹扩展力可定义为裂纹扩展单位欧氏长度所耗散的能量,即

$$G_{IC} = \frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}a} \tag{2}$$

* 国家杰出青年科学基金,国家教委跨世纪优秀人才基金,煤炭优秀青年教师基金资助。
本文于1995年10月12日收到。

式中：da 是裂纹扩展的微元长度；$d\Gamma$ 是裂纹扩展该微元长度所耗散的能量。

因此，根据断裂力学定义式(2)，对于裂纹为平直线和不规则曲线两种情况，G_{IC}可分别表示为

$$G_{IC}=\frac{d\Gamma_0}{da_0}=\frac{d\Gamma_f}{da_f} \tag{3}$$

式中：a_0 是平直裂纹长度；a_f 为分形裂纹欧氏长度，Γ_0 为裂纹作平直扩展所耗散的能量，而 Γ_f 为裂纹作不规则曲线扩展所耗散的能量，两者显然是不同的。上式的 G_{IC}表征了材料固有的抵抗断裂的性能，是材料的内禀物理量，我们记它为 G_{IC0}。

为什么实验测量的 G_{IC}与材料断裂面的分形维数相关呢？这是因为实际计算 G_{IC}时，所测的断裂能是裂纹作分形扩展所耗散的能量，而断裂面积却按平直面积来计算，我们记实际测量的材料的临界裂纹扩展力为 G_{ICf}，即

$$G_{ICf}=\frac{d\Gamma_f}{da_0} \tag{4}$$

G_{ICf}反映了断裂面不规则性的分形效应，但并不是材料的内禀物理量，由(1)、(3)、(4)式，我们有

$$G_{ICf}=\frac{d\Gamma_f}{da_0}=\frac{d\Gamma_f}{da_f}\cdot\frac{da_f}{da_0}=G_{IC0}\varepsilon^{1-D} \tag{5}$$

因此实验测量的材料临界裂纹扩展力 G_{ICf}当然与断口的粗糙性相关，即实际测量的材料临界裂纹扩展力与分形维数成正变关系，比断裂力学所定义的临界裂纹扩展力 G_{IC0}要大。

文献[1]中，令

$$G_{IC0}=\frac{d\Gamma}{da_0} \tag{6}$$

$$G_{ICf}=\frac{d\Gamma}{da_f} \tag{7}$$

由此得出下式

$$G_{ICf}=G_{IC0}\varepsilon^{D-1} \tag{8}$$

其错误体现在两个方面：(1)若 G_{IC0}，G_{ICf}分别为平直裂纹与分形裂纹的临界扩展力，则两式中的 Γ 应是两个不同的量，前者为平直裂纹扩展耗散的能量 Γ_0，后者应是裂纹分形扩展耗散的能量 Γ_f，两者截然不同。(2)若认为两式中 Γ 均为裂纹作不规则扩展耗散的能量，即为 Γ_f，则第一式是包含分形效应的实测量 $d\Gamma_f/da_0=G_{ICf}$，而第二式才是材料的内禀力学量 $d\Gamma_f/da_f=G_{IC0}$，文献[1]将两者关系弄颠倒了，以至得出了与事实完全相反的结论，同样文献[1]中第(14)式，本身出自于错误的公式(8)，当然也不可能得出正确的结论。

我们同样可以从表面能的概念来推导，设材料的表面能为 γ，应指出，这是一个材料内禀物理量，与断面是否平直或粗糙无关，因此裂纹平直扩展单位长度时所消耗的能量是

$$G_{IC0}=2\gamma\cdot 1 \tag{9}$$

而裂纹不规则扩展单位长度所消耗的能量是

$$G_{ICf}=2\gamma\cdot\varepsilon^{1-D} \tag{10}$$

所以有

$$G_{ICf}=G_{IC0}\cdot\varepsilon^{1-D} \tag{11}$$

这与前面由 K_{IC}的定义导出的结果是完全一致的。

3　论 G_{IC}，K_{IC}与 D 的相关性

文献[1]指出，G_{IC}，K_{IC}是起裂参量，而非过程参量，而分形维数 D 具有熵意义，是个过程参量，因此起裂参量 G_{IC}，K_{IC}不能用断裂过程参量 D 表征。这个观点粗看十分自然，但事实并非如此，我们知道，材料细观结构几何特征的不规则性可以由分形维数来表征，而材料的韧性参量(实际上是所有力学参量)与材料细观结构形貌密切相关，相同的材料由于细观结构的不同，它们的韧性参数是有区别的，这种区别就反映在 G_{IC}，K_{IC}与 D 的相关性上，应该用分形几何方法对材料细观结构进行几何分析才能定量地表征出来。我们可以说断口的分形结构是断裂过程的产物，但从更深一层的意义上来说，它是材料细观结构的产物，因为裂纹的不规则形貌是由材料细观结构特征所决定的，文献[4]由大理岩晶粒特征来建立微观断裂的分形模型，就是一个典型的例子。所以，从分形概念的本质出发，称 D 是一个材料结构的几何参量比称 D 是一个过程参量更恰当。因此引入 D 至 G_{IC}，K_{IC}的表达式中，正是反映了细观结构特征对材料韧性参数的影响，与 G_{IC}，K_{IC}仅是起裂参量，不能表征过程并不矛盾。

4　论裂纹分叉增韧

关于裂纹分叉增韧，人们从理论上和实验上都进行了深入的研究，得出裂纹分叉是导致材料韧性增加的一种原因[5]。文献[1]将裂纹分叉与材料增韧完全隔离开来，认为两者无关，其错误根源仍然在于(8)式，如果从(5)式出发，由于裂纹分叉增强了材料断裂面的不规则性，提高了 D 值，因此也就导致了 G_{ICf}即材料韧性值的增大。文献[1]认为“对同一种材料，保持其韧性值恒定，而仅仅提高裂纹扩展的驱动力的幅值，就可实现裂纹分叉”，这一观点也值得推敲。从损伤力学的观点来讲，从变形到破坏的过程实质上是材料内部损伤演化的过程，因而严格地讲材料每一瞬时的细观结构和力学参数都在变化[6]，那么对于不可逆损伤耗散过程，如何能保持材料韧性值的恒定呢？脆性的大理岩随着损伤的加剧，单位载荷作用下的变形量不断增大，材料的柔度与韧性增加。裂纹分叉是损伤演化的一种重要方式，它导致材料增韧也就不足为怪了。

5　结束语

分形几何是一门新兴的数学分支，由于对于自然界复杂现象提供了定量化的描述方法，因此它在各个学科领域的应用显示出旺盛的生命力，得到了众多的成果，经典理论无法解释的疑难，分形几何往往能独辟徒径，定量解决。但是由于分形几何尚不成熟及传统学科本身的难点，分形几何在力学中的应用仍然存在许多容易混淆的迷惑，真正意义上的解决问题必须有待于分数维空间微积分和分形空间力学等学科的建立和完善。就目前而言，只要我们准确地把握分形几何和力学概念的实质，仍然可以得到许多令人鼓舞的成果，从而推动力学理论的发展。

参 考 文 献

1 类维生,陈丙森.高压物理学报,1994,8(3):166～171
2 Mandelbrot B B. The Fractal Geometry of Nature. San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1982
3 褚武扬.断裂力学基础.北京:科学出版社,1979
4 谢和平.科学通报,1989,5:365～368
5 Smith E. Archives Mechanica, 1986, 38(1～2):185～190
6 余天庆,钱济成.损伤理论及其应用.北京:国防工业出版社,1993

A DISCUSSION ON SOME PROBLEMS IN FRACTAL DESCRIPTIONS OF SOME FRACTURE PROBLEMS

Gao Feng, Xie Heping

(*China University of Mining Technology, Xuzhou* 221008)

ABSTRACT Fractal geometry can provide quantitative methods to describe numerous irregular and complicated phenomena in nature, and has widely been used in many scientific fields. However people find that many similar experiments produce contradictory results, and thus make exploration from views of fractal range, size correlation, self-affine fractal and multifractal concepts, However, we find that many contradictory results are originated from poor understanding of fractal concepts and physical mechanical definitions, some of them are discussed in details in the paper.

KEY WORDS fractal, fracture toughness, critical crack propagation force, crack branching induced increasing toughness.