

分形图形周界和面积的关系

龙期威

(中国科学院金属物理研究所)

(中国科学院国际材料物理中心)

摘要 本文讨论分形图形周界和面积的关系;指出:在现实存在的有限层次自相似结构的近似分形图形中, Mandelbrot的周界—面积分维关系不适用。这可能是一些用此方法测出的分维值随码尺大小变化的根本原因。

关键词 分形 分维 Koch岛 自相似

一、引言

众所周知,非分形周界图形的长度和面积的平方根之比值只和图形的几何形状有关而与大小无关。对于具有分形周界的岛则很不相同,周界长度和测量的码尺长度有关。当码尺 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, $L(\varepsilon) \rightarrow \infty$, 而面积 $A(\varepsilon)$ 则保持有限值。Mandelbrot^[1,2] 和 Feder^[3] 指出:引入周界分维参数,则周界和面积之分维比值:

$$\alpha_D = \frac{[L(\varepsilon)]^{1/D}}{[A(\varepsilon)]^{1/2}} \quad (1)$$

只和选择的码尺有关,和图形大小无关,即^[3]

$$\alpha_D(\varepsilon) = N_\lambda^{1/D} \lambda \varepsilon^{(1-D)/D} \quad (2)$$

N_λ 为相似图形用相应码尺度量得的数值:

$$L_i(\varepsilon^*) = N_\lambda \varepsilon_i^* \quad (3)$$

λ 是和几何形状有关的参量。 N_λ 和 λ 在既定的一套相似图形中为常量。

Mandelbrot等^[2]曾经应用这个关系测量过断口分维。在此之后,许多人应用此法研究了材料的脆性^[4,5],断裂韧性^[6],疲劳^[7]及点蚀^[8]等。在部分实验里,出现了韧性和分维反变化关系的可疑结果^[4,5,6],有的人由此怀疑应用分形理论研究材料韧性的可能性^[4],也有一些人则认为一些物理过程出现韧性和分维反变化关系也是可能的^[9,10]。龙期威和穆在勤^[11]指出,用周界—面积关系的方法测出的断口分维值是随码尺变化的,此方法的应用需要特别小心。本文将对此问题进行进一步的讨论,指出存在的问题以及应用它测分维的不足。

二、周界和面积的分维关系

我们选择起始图形(如正四边形,正三角形)的边长为 L_0 , 周长为 P_0 , 面积为 A_0 , 码尺长度为 η 。

$$\varepsilon = \frac{\eta}{L_0} \quad (4)$$

ϵ 为无量纲量。

周界和面积的关系为：

$$\left[\frac{P(\epsilon)}{P_0} \right]^{1/D} = \frac{\alpha(\epsilon)}{a} \left[\frac{A(\epsilon)}{A_0} \right]^{1/2} \quad (5)$$

(5) 式相当于 P, A 以 P_0 长度为单位的表达式。当 $D = 1$ 时, $P(\epsilon) = P_0, A(\epsilon) = A_0, \alpha(\epsilon) = a_0$ 。

现在, 根据 Koch 曲线的自相似性质, 周界的长度应当满足以下关系

$$\frac{P(\epsilon)}{P_0} = \epsilon^{(1-D)} \quad (6)$$

由 (5) 式和 (6) 式可知,

$$\alpha(\epsilon) = a_0 \epsilon^{(1-D)/D} \left[\frac{A(\epsilon)}{A_0} \right]^{-1/2} \quad (7)$$

由 (7) 式我们可以看出:

1. $\alpha(\epsilon)$ 的表达式中比 (2) 式多了一个随码尺变化的因子 $[A_0/A(\epsilon)]^{1/2}$ 。(2) 式中的 a 是常数。

2. 对于一些特殊形状图形, 如正方 Koch 岛, $A(\epsilon) = A_0$, 面积不随测量码尺, 或分形结构层次变化。此时 (7) 式简化为

$$\alpha(\epsilon) = a_0 \epsilon^{(1-D)/D} \quad (8)$$

此即 Mandelbrot^[1] 和 Feder^[2] 指出过的周界和面积的分维比值随码尺的变化关系。但是, 对于一般图形, $A(\epsilon) \neq A_0$, (8) 式不成立。

3. 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, 由于 $A(\epsilon) \rightarrow A_f$ (常数)。因而

$$\alpha(\epsilon) \approx a_0 \epsilon^{(1-D)/D} \cdot (A_0/A_f)^{1/2} = C \epsilon^{(1-D)/D} \quad (9)$$

虽然 (2) 式和 (9) 式不完全相等, 但是, (9) 式和 (2) 式在规律性上还是相同的。所以, Mandelbrot 等的论断在码尺很小的情况还是近似成立的。

三、用周界—面积关系测分维的问题

实际发生在断口、腐蚀坑、晶粒及夹杂物等相似分形岛只是近似的, 只具有有限层次的自相似结构。层次数也不会太多。往往图形越小, 其周界包含的自相似结构层次反而越少。这和 Mandelbrot^[1] 和 Feder^[2] 分析的相似分形岛系列有很大的不同 (如图 1)。

如果我们用同样长短的码尺 P_0 去测量这三个不同大小的岛, 则其周长分别为: (a) $1P_0$, (b) $4P_0$, (c) 4^2P_0 。连续下去第 n 个自相似结构的岛的周长为 $4^{(n-1)}P_0$ 。以上 (a), (b), (c), …… (n) 序列的岛比较接近实际情形: 岛形越大, 则包含的自相似结构层次越多。

现在, 我们改用每个图形自己的起始图形周界长度 P_n (P_{01}, P_{02}, P_{03}) 为码尺单位去测量各自图形的周长。(a) 只有一个层次, 为 P_{01} , (b) 有二个层次, 为 $(4/3)P_{02}$, (c) 有三个层次, 为 $(4/3)^2P_{03}$ 。有 n 个层次的, 为 $(4/3)^{n-1}P_{0n}$ 。我们立即可以看出: 探讨这一类不同大小相似分形岛的周界面积的分形关系等价于探讨一个分形岛的不同自相似结构层次的周

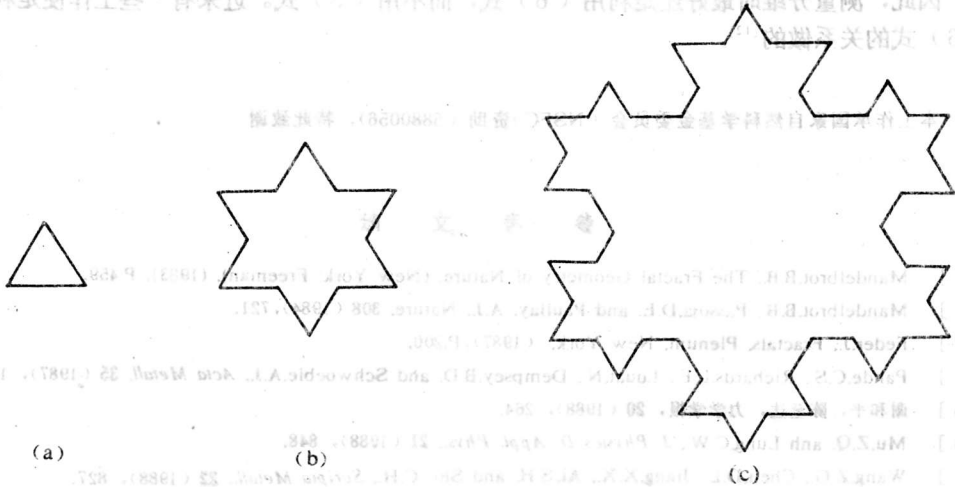


图 1 正三角形分形岛

(a) 起始图形周长为 P_0 , (b) 起始图形周长为 $3P_0$, (c) 起始图形周长为 3^2P_0 .

Fig. 1 Diagrammatic sketch of regular triangle fractal island. (a) The initial island perimeter equals P_0 . (b) The initial island perimeter equals $3P_0$. (c) The initial island perimeter equals 3^2P_0 .

界面积关系。前面已经指出：不同层次的周界面积分维比值是不一样的。因此，利用这种关系测出的“分维”必然会和码尺大小有关，即不是真正的分形周界的分维值。在这种情形下，这样的测分维方法不适用。

作者在前文^[10,11]中已对两种标准的分形岛实例进行了计算。可以看出用此法的 $D(n)$ 测值是随分形结构层次数 n 或码尺大小变化的。在这里所着重说明的是：近来许多工作均在测各种大小不等的相似图形的周长和面积，求出平均值的办法实际上相当于单一的图形，以不同层次数的测值求平均，而后者是不合理的。

再者，根据标准正方、三角形分形岛的实际计算^[10,11]，我们知道 $A(\epsilon)$ 或 $A(n)$ 到一定层次之后就趋于某一极限值了。

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{d \log P(\epsilon)}{d \log A(\epsilon)} \rightarrow \infty \quad (10)$$

因此， $\alpha(\epsilon)$ 可以从 α_0 变到无穷大！诸 P_i 和 A_i 值在双对数图上不会是直线关系。实验上得到的“直线”关系可能夹杂着一些假象^[10]和对数坐标对偏离的缩小。

我们认为：这可能是此法测的分维值随码尺大小变化的根本原因。

当码尺相对于起始图形周长小很多时，此法测出的分维值可能近似成立^[11]；但实验中很难判断所用的码尺是否已足够小。最好认真检验一下用此法测出的分维值是否随码尺变化。这当然又涉及要变化码尺长度多大范围的问题。还需要注意现实的自相似结构都是有限层次的。如果码尺选择得小于最小步长（或最大层次），所测的周长、面积，因而分维值也就不再变了。这当然还不能肯定分维测值已达到近似成立的状态，因为 Mandelbrot 等所讨论的相似分形岛是理想的无限层次的。

因此,测量分维时最好还是利用(6)式,而不用(5)式。近来有一些工作便是利用(6)式的关系做的^[12]。

本工作承国家自然科学基金委员会(NSFC)资助(5880056),特此致谢。

参 考 文 献

- [1] Mandelbrot,B.B. The Fractal Geometry of Nature. (New York: Freeman), (1983), P.459.
- [2] Mandelbrot,B.B., Passoja,D.E. and Paullay, A.J., Nature, 308 (1984), 721.
- [3] Feder,J., Fractals, Plenum, New York, (1987), P.200.
- [4] Pande,C.S., Richards,L.E., Louat,N., Dempsey,B.D. and Schwoeble,A.J., *Acta Metall.* **35** (1987), 1633.
- [5] 谢和平, 陈至达, 力学学报, 20 (1988), 264.
- [6] Mu,Z.Q. and Lung,C.W., *J. Physics D: Appl. Phys.*, **21** (1988), 848.
- [7] Wang,Z.G., Chen,D.L., Jiang,X.X., Ai,S.H. and Shi, C.H., *Scripta Metall.*, **22** (1988), 827.
- [8] Zhou,X.Y., Chen,D.L., Ke,W., Zang,Q.S. and Wang,Z.G., *Materials Letters*, **12** (1989), 473.
- [9] Zhang,S.Z. and Lung,C.W., *J.Phys. D: Appl. Phys.*, **22** (1989), 790.
- [10] Lung,C.W. and Zhang,S.Z., *Physica D*, **38** (1989), 242.
- [11] Lung,C.W. and Mu,Z.Q., *Phys. Rev. B*, **38** (1988), 11781.
- [12] 龙起易, 穆在勤等, (待发表)。

PERIMETER-AREA RELATION OF FRACTAL ISLAND

Long Qiwei

(Institute of Metal Research, Academia Sinica,

International Centre for Materials Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT The relationship of perimeter with area (P/A relation) of fractal island is discussed. It is shown that Mandelbrot's fractal relation between Koch perimeter and area does not hold in the island with finite self-similar generations. This might be the reason why the fractal dimension measured with P/A relation varied with the length of yardstick in previous work.

KEY WORDS fractal, fractal dimension, koch island, self-similarity.