

文章编号: 1000-5773(2000)03-0229-06

库特 (Couette) 剪切流准确解的一般形式

韩德才, 周铁农, 潘永阁

(燕山大学, 河北秦皇岛 066004)

摘要: 从 N-S 方程出发, 得到了轴对称异型断面管纯剪切流动速度分布的一般解, 进而推出了纯剪切流动有限宽度矩形断面管的速度分布和流量计算公式, 证明了库特剪切流是有限宽度矩形断面管当宽度趋向无穷大时的一种特例。并对库特剪切流流量的计算误差进行了分析, 给出了该公式的适用范围, 同时对有限宽度矩形断面管剪切流公式进行了曲线拟合, 得到了便于工程使用的流量计算公式。

关键词: 库特剪切流; 准确解; 速度分布

中图分类号: O35 **文献标识码:** A

1 引 言

N-S 方程问世一百多年来, 由于方程的高度非线性, 其一般解至今不能得到解决。许多学者根据流动的具体形式, 对其进行物理模型简化和数学简化, 然后对简化后的方程进行求解, 得到了一些很有限的基本解, 常称这些解为准确解或解析解, 库特剪切流就是其中的一例。库特剪切流无论在理论上还是工程应用上都具有重要意义, 其推导过程和计算公式几乎被列入所有的流体力学教科书中^[1-3], 已成为流体力学课程必讲的一个解析解的例子。尽管如此, 库特在推导过程中存在着一个缺欠, 这就是假设二平行平板为无穷大, 即不考虑平板宽度的影响。而工程上多数流动是在有限宽度平板下进行的, 这使库特剪切流的应用范围受到限制。为了解决这一问题, 本工作从 N-S 方程出发, 通过对有限宽度矩形断面管纯剪切流动的分析, 对库特剪切流进行了修正。这对流体力学理论和工程应用都具有重要意义。

2 轴对称异型断面管剪切流动速度分布的一般公式

由于液压元件和流体静压技术的不断发展, 异型断面管得到了广泛应用^[4,5], 其断面可以是三角形、梯形、半圆形和矩形, 统称为异型断面管或非圆断面管。本工作所研究的轴对称异型断面管剪切流动模型如图 1 所示, 底边以 u_0 速度运动, 其它 3 边固定不动, 它服从流体运动一般方程, 即 N-S 方程

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \mathbf{F} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u}$$

式中: μ 为动力粘度; ρ 为流体密度; \mathbf{F} 为质量力; p 为压力; $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$, u_x 、 u_y 、 u_z 分别为流体速度的三个分量。在图 1 所示的流动模型和坐标下假定

(1) 流动为平行流动, 即 $u_y = 0, u_z = 0$, 而 $u_x \neq 0$;

收稿日期: 2000-03-27; 修回日期: 2000-05-08

作者简介: 韩德才(1951—), 男, 副教授.

- (2) 流动为恒定的, 即 $\partial/\partial t = 0$;
 (3) 流动为充分发展的层流, 即 $\partial u_x/\partial x = 0$;
 (4) 质量力可以忽略, 即 $F = 0$;
 (5) 无压差, 即纯剪切流动, $\nabla p = 0$ 。

根据上述假定, N-S 方程可简化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

在(1)式中, 为简化起见, 我们弃脚标 x 而不计, 即令 $u_x = u$ 。对应的边界条件为

$$u = 0, \quad \text{当 } y = f(z), y = -f(z) \text{ 时} \quad (2)$$

$$u = 0, \quad \text{当 } z = 0 \text{ 时} \quad (3)$$

$$u = u_0, \quad \text{当 } z = h \text{ 时} \quad (4)$$

式中: $f(z)$, $-f(z)$ 分别为轴对称异型断面管的两个对称边, h 为异型断面管的高度。这样, 我们所研究的流动转化为由方程(1)~(4)所构成的定解问题。此定解为拉普拉斯方程矩形区域内的第一类边值问题。这样一个定解问题, 与库特剪切流相比其主要区别有两点: 第一, 前者为二维流动, 而后者为一维流动, 若再假定二平行平板为无穷大, 即 $\partial u_x/\partial y = 0$, 则方程(1)退化为库特剪切流所对应的微分方程; 第二是边界条件不同, 前者具有 4 个边界条件, 即方程(2)~(4), 而后者只有 2 个边界条件, 相当于本文的方程(3)和方程(4)。

有许多方法可以求解上述定解问题, 这里拟用分离变量法。设 $u(y, z) = Y(y)Z(z)$, 则

$$\partial^2 u/\partial y^2 = ZY'' \quad \partial^2 u/\partial z^2 = YZ''$$

将其代入方程(1), 得到

$$Z''/Z = -Y''/Y \quad (5)$$

方程(5)左端为 z 的函数, 右端为 y 的函数, 要使其成立, 只有其公共比值为一个与区域内的点无关的常数, 令该常数为 λ , 则有

$$Z''/Z = -Y''/Y = \lambda \quad (6)$$

于是得到两个方程, 即

$$Z'' - \lambda Z = 0 \quad (7)$$

$$Y'' + \lambda Y = 0 \quad (8)$$

由边界条件可以验证, 当 $\lambda \leq 0$ 时, $u \equiv 0$ 。故只能取 $\lambda > 0$, 因此可令 $\lambda = \beta^2$, 代入方程(7)和方程(8)得到

$$Z'' - \beta^2 Z = 0 \quad (9)$$

$$Y'' + \beta^2 Y = 0 \quad (10)$$

解得

$$Z = Ae^{\beta z} + Be^{-\beta z} \quad (11)$$

$$Y = C \cos \beta y + D \sin \beta y \quad (12)$$

式中 A 、 B 、 C 、 D 为待定积分常数。

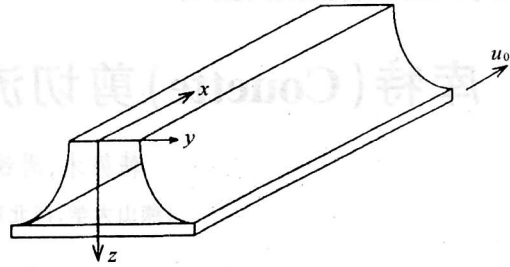


图 1 轴对称异型断面管模型
 Fig.1 Axial symmetry model of conduit
 with non-circular cross section

将边界条件(2)代入方程(12)解得 $C = 0$ 或 $D = 0$, 但两者不能同时为零。否则将使 $u \equiv 0$ 。由于流动关于 z 轴对称, 故只能 $D = 0$ 。这样可得

$$C \cos \beta f(z_0) = 0$$

由于 C 不等于零, 故只有 $\cos \beta f(z_0) = 0$, z_0 为对称边界上的点。由此可得

$$\beta = \frac{(2n+1)\pi}{2f(z_0)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

如令 $\Delta_n = \frac{(2n+1)\pi}{2}$, 并将 β 代入方程(11)和方程(12), 得到

$$Z = A e^{\Delta_n z / f(z_0)} + B e^{-\Delta_n z / f(z_0)} \quad (13)$$

$$Y = C \cos \Delta_n y / f(z_0) \quad (14)$$

由叠加原理可得到满足方程(1)和边界条件(2)的解为

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n e^{\Delta_n z / f(z_0)} + B_n e^{-\Delta_n z / f(z_0)}] \cdot \cos \Delta_n y / f(z_0) \quad (15)$$

式中: $A_n = AC, B_n = BC$ 。

由条件(3)可得 $A_n = -B_n$, 代入方程(15), 再利用边界条件(4), 并对比富里埃展开式, 得到

$$A_n = (-1)^n \cdot \frac{2u_0 / \Delta_n}{e^{\Delta_n h / f(z_0)} - e^{-\Delta_n h / f(z_0)}} \quad (16)$$

将其代入方程(15), 得到

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2u_0}{\Delta_n} \cdot \frac{e^{\Delta_n z / f(z_0)} - e^{-\Delta_n z / f(z_0)}}{e^{\Delta_n h / f(z_0)} - e^{-\Delta_n h / f(z_0)}} \cdot \cos \Delta_n y / f(z_0) \quad (17)$$

这就是轴对称异型断面管纯剪切时的速度分布。显然它是一个关于 y, z 的二元函数, 这是由于考虑了有限宽度异型断面管侧壁的影响。

3 有限宽度矩形断面管纯剪切流动

对于有限宽度矩形断面管纯剪切流动, 其宽度为确定值, 如图2所示, 假定宽度为 $2a$, 则 $f(z) = a$, 将其代入方程(17), 得到

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2u_0}{\Delta_n} \cdot \frac{e^{\Delta_n z / a} - e^{-\Delta_n z / a}}{e^{\Delta_n h / a} - e^{-\Delta_n h / a}} \cdot \cos \Delta_n y / a \quad (18)$$

这就是有限宽度矩形断面管纯剪切流动的速度分布公式, 显然它也是一个关于 y, z 的二元函数。如果给定矩形断面高度 $h = 0.5 \text{ cm}$, 宽度 $2a = 2 \text{ cm}$, 滑动边速度 $u_0 = 1 \text{ cm/s}$, 则可得到图3所示的速度剖面图。由图3明显可见, 在有限宽度矩形断面管的纯剪切流动中, 边壁的影响是很大的。与传统的库特剪切流相比, 前者为二维速度剖面, 而后者为仅与 z 有关的一维速度剖面, 且线性分布。

下面将证明传统的库特剪切流速度公式是本文公式(18)当宽度 $2a$ 趋向无穷大时的一种特例。对公式(18)取极限, 有

$$\lim_{a \rightarrow \infty} u = \lim_{a \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2u_0}{\Delta_n} \cdot \frac{e^{\Delta_n z / a} - e^{-\Delta_n z / a}}{e^{\Delta_n h / a} - e^{-\Delta_n h / a}} \cdot \cos \Delta_n y / a =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lim_{a \rightarrow \infty} (-1)^n \cdot \frac{2u_0}{\Delta_n} \cdot \cos \Delta_n \frac{y}{a} \cdot \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{e^{\Delta_n z/a} - e^{-\Delta_n z/a}}{e^{\Delta_n h/a} - e^{-\Delta_n h/a}}$$

根据边界条件(4), Σ 内的第一个极限为 u_0 , 而第二个极限出现 $0/0$ 形式。应用罗必达法则, 可得到后者的极限为 z/h , 所以上述极限为

$$\lim_{a \rightarrow \infty} u = u_0 z/h$$

这恰好是库特剪切流的速度分布公式。这就证明了传统的库特剪切流速度公式是本文公式(18)当宽度 $2a$ 趋向无穷大的一种特例。

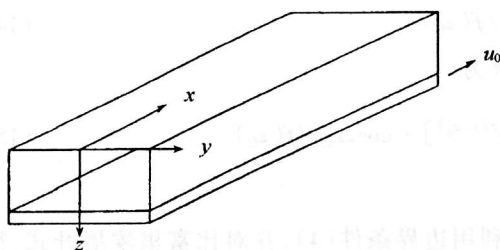


图 2 矩形断面管模型

Fig.2 Model of conduit with rectangular cross section

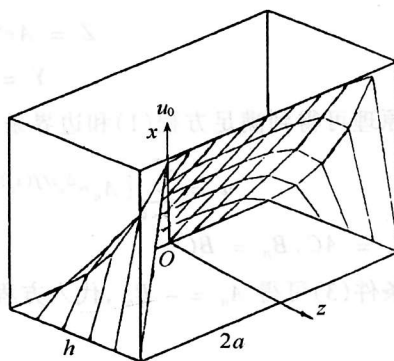


图 3 二维速度剖面

Fig.3 Two dimensional velocity distributions

4 流量计算公式、误差分析、拟合公式

4.1 流量计算公式

工程上, 经常使用的是流量公式。为此, 我们对公式(18)进行积分并设流量为 Q , 得到

$$Q = \int_{-a}^a \int_0^h u \cdot dy dz = \int_{-a}^a \int_0^h \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2u_0}{\Delta_n} \cdot \frac{e^{\Delta_n z/a} - e^{-\Delta_n z/a}}{e^{\Delta_n h/a} - e^{-\Delta_n h/a}} \cdot \cos \Delta_n y/a \cdot dy dz =$$

$$\sum_0^{\infty} \frac{4a^2 u_0}{\Delta_n^3} \cdot \frac{e^{\Delta_n h/a} - e^{-\Delta_n h/a} - 2}{e^{\Delta_n h/a} - e^{-\Delta_n h/a}} \quad (19)$$

这就是有限宽度矩形断面管纯剪切流动的流量公式。它考虑了边壁的影响, 因此计算精度高。但是, 它是无穷级数形式, 计算不方便。这就是为什么本文后面要考虑拟合公式的原因。

4.2 误差分析

由于库特剪切流忽略了宽度方向上的边壁影响, 其流量计算必然会偏高。利用本文的结果, 可以估计这一偏差。设原有库特剪切流流量为 Q_{CT} , 则其计算公式为

$$Q_{CT} = ah u_0 \quad (20)$$

设有限宽度矩形断面管纯剪切流动的流量为 Q_{JU} , 其计算公式为(19)式, 又设两者的相对误差为 E , 则

$$E = (Q_{CT} - Q_{JU})/Q_{JU} \quad (21)$$

给出矩形的宽和高以及 u_0 , 可计算出不同宽高比 $2a/h$ 下的误差 E , 如表 1 所示。由表 1 可见, 相对误差随着宽高比的增加在减少。只有当宽高比 $2a/h$ 大于 100 时, 其误差才小于 2%,

此时可忽略边壁的影响。当宽高比为 4 时,其误差已达 15.8%。其误差之大,必须修正。

表 1 不同宽高比 $2a/h$ 下流量的相对误差 E

Table 1 Relative error of flow rate to different ratio $2a/h$

| $u_0/(cm/s)$ | $h/(cm)$ | $2a/(cm)$ | $2a/h$ | $Q_{CT}/(cm^3/s)$ | $Q_{JU}/(cm^3/s)$ | E |
|--------------|----------|-----------|--------|-------------------|-------------------|-------|
| 1 | 1.00 | 2 | 2 | 0.729 | 1.0000 | 0.372 |
| 1 | 0.66 | 2 | 3 | 0.667 | 0.5450 | 0.222 |
| 1 | 0.50 | 2 | 4 | 0.500 | 0.4270 | 0.158 |
| 1 | 0.20 | 2 | 10 | 0.200 | 0.1850 | 0.060 |
| 1 | 0.10 | 2 | 20 | 0.100 | 0.0970 | 0.033 |
| 1 | 0.05 | 2 | 40 | 0.050 | 0.0487 | 0.023 |
| 1 | 0.02 | 2 | 100 | 0.020 | 0.0196 | 0.020 |

4.3 拟合公式

由公式(21)可以得到

$$Q_{JU} = Q_{CT}/(1 + E) = \epsilon \cdot Q_{CT} \tag{22}$$

$$\epsilon = 1/(1 + E) \tag{23}$$

由此可见,只要知道 E 的计算公式,就可以利用库特剪切流的流量公式来计算流量,之后加以适当的修正,其修正系数为 ϵ 。而 E 的计算公式可以通过曲线拟合的方法得到。现将表 1 图示化,其结果如图 4 所示。由图 4 可见, E 随 $2a/h$ 的变化规律为一衰减曲线。这里,我们用幂函数进行曲线拟合。为此,设 $E = M_0(2a/h)^{M_1}$, 可得到 $M_0 = 0.473, M_1 = -0.803$ 和相关系数 $R = 0.986$, 所以 $\epsilon = [1 + 0.473(2a/h)^{-0.803}]^{-1}$, 这就是库特剪切流流量公式的修正系数。 E 的拟合曲线如图 4 所示。

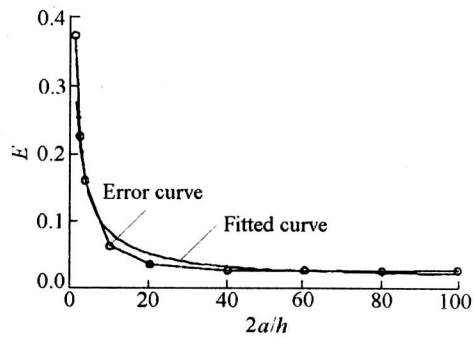


图 4 误差及其拟合曲线

Fig.4 Error and fitted curve

5 结 论

库特剪切流为有限宽度矩形断面管纯剪切流动的一个特例。库特剪切流的流量公式仅在大宽高比下适用。当宽高比小于 100 时,需要进行修正。本文中给出的修正后的流量公式计算简单、方便,适合工程应用。

参考文献:

[1] 吴望一.流体力学(下) [M].北京:北京大学出版社,1983.249-252.
 [2] 赵学端,廖其奠.粘性流体力学 [M].北京:机械工业出版社,1983.56-60.
 [3] 生井武文,井上雅弘.粘性流体力学 [M].伊增欣译.北京:海洋出版社,1984.

