

基于随机数值模拟的层裂统计特性*

管尤好, 张豪, 裴晓阳

(中国工程物理研究院流体物理研究所, 四川 绵阳 621999)

摘要: 通过融合随机理论与延性金属层裂相场模型, 设置初始屈服强度服从4种随机分布以表征材料的缺陷随机分布, 再利用显式动力学求解, 实现了层裂损伤从渐进演化到失稳贯通过程的模拟。通过平板撞击实验和三角波加载实验对模拟结果进行了验证, 揭示了材料屈服强度不均匀性与层裂强度及损伤数量面积的关系。研究表明, 不论是延性金属材料的单层层裂还是多层层裂, 其初始屈服强度标准差与层裂强度均呈现负相关机制; 对于单层层裂, 无论初始屈服强度采用何种分布, 其层裂强度均服从正态分布。对于多层层裂, 初始成核时损伤区数量随着标准差的增大而线性增大, 损伤区大小均服从Weibull分布; 而在同一初始随机分布下, 损伤区数量随时间演化呈初始缓慢增长-随后加速直至饱和-饱和后再下降的趋势, 对应了层裂损伤演化成核贯通的典型过程。

关键词: 延性金属; 层裂; 随机模型; 相场断裂模型; 动态损伤

中图分类号: O346; O521.2; **文献标识码:** A

层裂是由物质界面反射稀疏波相互作用引起的动态损伤破坏现象, 涉及材料在极端条件下的复杂物理过程, 包括塑性局域化、损伤大变形(微孔洞、长大和贯通)、形成宏观裂纹直至最终破碎离散等阶段, 这一过程涵盖了从微观到宏观的多尺度耦合, 具有丰富的物理内涵和重要的学术价值^[1, 2]。层裂会显著削弱结构的力学性能, 是航天器防护、装甲抗穿透以及核反应堆容器寿命设计中的关键科学问题, 具有重要的工程应用价值。真实材料在微观上并非是均质连续的, 存在晶界、孪晶界、夹杂物、位错等微缺陷^[3-5], 冲击作用, 由于波的相互作用, 上述微结构在拉伸状态下会界面脱黏或夹杂破碎导致产生初始孔洞, 而由于材料微结构缺陷分布呈随机性, 导致孔洞萌生位置和时间具有明显随机性, 大量实验观察到层裂断面粗糙(后文称为层裂面粗化现象)甚至呈分形形状, 这正是缺陷随机分布造成的宏观效应。因此, 研究表示材料缺陷分布的随机模型对层裂的影响规律, 对于揭示延性金属在极端环境下的破坏机理、实现工程结构的可靠性设计具有重要意义。

关于层裂的研究, 最早采用瞬时强度模型^[6, 7], 此模型简单, 计算效率高。然而, 它无法模拟材料在加载过程中的逐步损伤演化, 特别是孔洞成核和扩展等细观过程, 因此计算出的自由面粒子速度曲线拟合效果往往不够好。随后, Tuler和Butcher提出了损伤累积模型^[8], Johnson提出了孔洞增长模型^[9], Seaman和Curren等在连续性本构关系中引入微损伤(包括孔洞和微裂纹)的统计描述, 提出了同时适合于延性材料和脆性材料的成核增长模型(nucleation and growth, 简称NAG模型)^[2, 10-12], 这些模型相较于瞬时模型, 能更好地给出自由面粒子速度, 但其建立大多基于单一孔洞分析或是对回收实验结果的统计描述, 介观尺度大量孔洞聚集等复杂的相互作用过程难以准确给出, 自由面粒子速度曲线回跳信

*收稿日期: 2025-12-29; 修回日期: 2026-02-26

基金项目: 中国工程物理研究院院长基金(YZJJZQ2023001); 冲击波物理与爆炸物理全国重点实验室基金(2023JCJQLB05408)

作者简介: 管尤好(1999-), 男, 硕士研究生, 主要从事材料的冲击动力学行为研究。

E-mail: 2622458745@qq.com

通讯作者: 张豪(1988-), 男, 博士, 副研究员, 主要从事材料的冲击动力学行为研究。

E-mail: housezh@163.com

号后仍难以准确预测。为了建立更准确的模型，Molinari和Jacques等^[13]考虑了孔洞聚集时应力的软化度或总能量释放率，使模型能更准确描述层裂损伤的演化过程^[14, 15]，能更好地给出回跳后的粒子速度曲线。随后，为了更好地考虑材料缺陷的随机性，研究逐渐引入了考虑形核行为的复杂模型。根据Molinari和Wright^[16]的研究，随机形核假设被广泛应用于层裂模拟中。该假设认为孔洞成核是一个随机过程，材料的微观缺陷（如孔洞）分布是具有空间随机性的，且其形核过程对环境应力和材料微结构的变化高度敏感。进一步地，Corentin Thouénon和Alizée Dubois等^[17]提出了形核位点的双重空间分布模型。该模型指出，在平面内，形核位点呈现泊松分布，即形核点是无规则分布的，而在平面外，形核点则表现为高斯相关分布，显示出一定的长程关联。这表明，虽然形核点在二维平面内是随机分布的，但其在三维空间中的分布则受到较大范围内的力学行为与微观缺陷的影响，呈现出相关性较强的特点。这些研究表明，材料的形核行为不仅仅是局部的随机过程，而是与材料整体的微观结构和外界载荷的相互作用密切相关。同时，考虑到这种空间相关性的影响对模拟层裂真实复杂裂纹至关重要。然而，虽然上述模型在建模过程中考虑了随机性的影响，但得到的宏观模型是一个均匀化的模型，模拟得到的是均匀的层裂带，无法呈现出孔洞裂纹复杂的随机分布形貌，从而无法分析材料缺陷分布造成的随机性结果。

近年来，相场方法开始被用来模拟各类材料在动态断裂与冲击条件下的随机复杂裂纹起始与扩展行为^[18, 19]。Wu等^[20]提出的相场损伤断裂理论则为延性材料层裂行为的研究提供了新的思路，基于此，Zhang等^[21]、wang等^[22]分别提出了层裂相场模型。通过能量泛函与相场演化方程构建可描述微孔洞成核、长大与宏观断裂的连续损伤框架，使得层裂动力学过程能够在数值上无网格依赖地再现，并与冲击实验的自由面速度信号匹配良好。此外，最新研究进一步将晶体塑性与相场断裂耦合^[23]，揭示了金属在不同应变率下断裂模式的转变机制及位错密度对宏观断裂控制的作用，这为动态断裂机理尤其是在高应变率载荷下的材料响应提供了更加直观物理描述。在延性断裂与层裂问题中，随着研究的深入，学界提出了多种适用于复杂材料行为的相场模型。针对小应变塑性条件下的延性断裂，已有综述系统讨论了相场模型在考虑耗散机制、塑性累积与裂纹发展的数值实现与算法设计^[24]，强调了相场方法在捕捉延性材料损伤过程中多机制竞争的能力。同时，相场方法也被用于含热力耦合、多场交互作用等复杂断裂问题的建模，例如在热冲击诱导裂纹演化中，热-力-水耦合相场模型被用来分析热应力引起的裂缝网络发展^[25]。相场模型不断向高维、多物理场耦合与更广泛材料类别拓展，显示出其在复杂断裂行为模拟中的通用性与适应性。除了模型本体的完善外，近期研究还关注引入材料内部随机性因素，以提升统计层面的预测能力。在空间非均质材料或随机场载荷条件下，通过将关键材料参数视为随机场，构建随机相场模型能够模拟实际材料内部缺陷分布对宏观断裂行为及统计规律的影响，为材料可靠性评估提供了新的理论与数值工具。特别是，Zhang等^[21]再现了延性层裂面粗化现象，使得模拟的层裂裂纹分布结果与实验结果高度一致，并揭示了分布式孔洞萌生、长大、贯通形成延性裂纹面的典型过程是造成层裂面粗化的细观机制^[26]。但该文仅是初步探索，只给出了基于固定的随机分布模型（均匀分布）产生的非均匀性结果，未分析不同随机分布模型对层裂裂纹分布的影响，也不能给出何种分布最适合描述层裂随机性。

为了通过模拟研究材料初始缺陷分布对层裂结果的影响，需要对材料初始缺陷进行建模。针对材料缺陷分布的描述方法，可以采用直接建模，利用分子动力学、离散位错等方法，建立晶粒位错等真实微观结构^[27-29]，并在实际材料中随机分布此类微结构进行大规模计算，但计算资源要求较高，建模极其繁杂。而随机理论能够通过概率分布来描述材料的关键参数的随机性，避免了对每个缺陷的详细建模，显著减少了计算复杂度并提高了计算效率。这种方法不仅能够更高效地反映材料的异质性，还能通过统计描述来捕捉材料性能的随机性，因此在40-50年代即被广泛应用于材料的强度统计理论^[30]。而不同的概率分布模

型适用于不同类型的材料，其中最常用的包括正态分布、对数正态分布、威布尔分布等。正态分布通常用于描述那些缺陷较为均匀、分布相对对称的材料特性，如金属材料的屈服强度和硬度等属性，Sekulski^[31]对普通强度船壳结构钢板的屈服强度统计指出，其分布近似正态分布或对数正态分布。对于缺陷分布呈右偏（少量极大值、更多小值）且微观异质性较强的材料，对数正态分布被认为是一个更合适的统计模型。T.Sakai^[32]等和Nukala^[33]等指出，在具有广泛异质性的准脆性材料中，断裂强度分布更符合对数正态而非威布尔或Gumbel分布。NASA的技术报告^[34]提出了一个重要的观点，威布尔分布广泛应用于材料断裂强度和疲劳寿命的描述，尤其适用于那些具有不均匀缺陷分布的材料，威布尔分布可以有效地拟合其强度数据。例如，Bhuiyan^[35]等对304不锈钢的拉伸强度进行了统计分析，发现其拉伸强度数据能够通过两参数威布尔分布进行准确描述；Ono^[36]等提出，通过威布尔模量的估算方法，能够有效描述金属合金的断裂强度分布。基于此可以看出，对于不同的材料属性，不同的材料模型参数呈现不同的随机分布特性，但何种随机分布模型最适合描述层裂行为，目前还没有定论。

综上所述，当前层裂统计特性研究存在的问题主要是：一是大多数模型未考虑材料缺陷分布的随机性，无法准确预测材料缺陷分布导致的层裂随机性特征；二是对于不同统计分布（均匀、正态、对数正态、Weibull等）对层裂强度和裂纹形貌的影响缺乏系统研究，尚不能确定何种随机模型最能反映实际材料缺陷分布。三是跨尺度关联不足，难以将微观缺陷统计特性和层裂宏观特性（如层裂强度和损伤分布）相关联。针对上述问题，本文在相场层裂模拟方法的基础上，通过引入不同的随机分布模型来描述微观结构的初始随机分布，基于模拟得到层裂强度及损伤分布等随机特征，分析不同随机模型对材料层裂统计特性的影响。

1. 研究方法

本文聚焦于延性金属的层裂行为，结合了相场损伤断裂模型和随机理论，旨在揭示材料微结构随机分布特征对层裂的影响。首先，基于相场损伤断裂理论^[37-39]，构建层裂模型。同时，引入随机理论中四种常见的概率分布（均匀分布、正态分布、对数正态分布和威布尔分布），表征材料初始屈服强度，来研究随机模型对层裂强度和损伤分布的影响。

1.1 相场模型

本文对前期建立的层裂相场模型做简要概述，具体可参考文献^[21]。层裂相场模型基于体量-偏量分解，无损伤材料的体量-偏量分解形式为：

$$\bar{\sigma} = -\bar{p}I + \bar{s}\#(1)$$

其中，压力 $\bar{p} = -\text{trace}(\bar{\sigma})/3$ ， \bar{s} 为偏应力， I 为单位对角矩阵。

体量部分由Gruneisen状态方程求解：

$$\bar{p} = \beta\rho_0c^2\chi + (\gamma_0 + \alpha\chi)\varepsilon\#(2)$$

系数由应力状态决定：

$$\beta = H(-\chi) + H(\chi) \frac{1 + \left(1 - \frac{1}{2}\gamma_0\right)\chi - \frac{1}{2}\alpha\chi^2}{[1 - (S_1 - 1)\chi]^2}\#(3)$$

其中， $H(x)$ 为Heaviside函数，当 $x \geq 0$ 时， $H(x) = 1$ ；当 $x < 0$ 时， $H(x) = 0$ 。压缩系数 $\chi = \rho / \rho_0 - 1$ ，由当前密度 ρ 和初始密度 ρ_0 确定； ε 为单位体积内能； c ， γ ， α 和 S_1 为材料参

数^[40]。

偏量部分通过流体弹性进行求解：

$$\begin{aligned}\bar{S} &= 2G_0\dot{\epsilon}^e = 2G_0(\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p) \\ f(\sigma, q) &= \sqrt{3J_2} - \sigma_y \leq 0, \bar{J}_2 = \frac{1}{2}\bar{s}:\bar{s} \#(4) \\ \dot{\epsilon}^p &= \dot{\epsilon}^p = \lambda \frac{3\bar{s}}{2\sqrt{3J_2}} \\ \lambda &\geq 0, f \leq 0, \lambda f = 0\end{aligned}$$

其中，式(4)₁为弹性应力应变关系， G_0 为剪切模量， $\dot{\epsilon}^e$ 和 $\dot{\epsilon}^p$ 分别为偏应变和塑性应变，式(4)₂为 von Mises 屈服准则， \bar{J}_2 为 von Mises 等效应力， σ_y 为屈服应力；式(4)₃为塑性流动法则， λ 为流动因子；式(4)₄为塑性流动率 Kuhn-Tucker 加卸载条件。

屈服应力采用Johnson-cook模型：

$$\sigma_y = [A + B\epsilon_p^k] \left(1 + C \ln \frac{\dot{\epsilon}_p}{\dot{\epsilon}_0} \right) \omega(T) \#(5)$$

其中， A ， B ， C ， k 均为模型参数， ϵ_p 为等效塑性应变， $\dot{\epsilon}_p$ 为应变率， $\dot{\epsilon}_0$ 为相对应变率， $\omega(T)$ 为温度软化项。

在完好材料模型的基础上考虑损伤的影响，损伤控制方程（即相场控制方程）如下：

$$\bar{\eta}\dot{d} = 2b^2\Delta d - \omega(d)D + \alpha(d) \#(6)$$

其中， $\bar{\eta} = \frac{c_a b}{G_f} \eta$ （ η 为黏性系数）， d 表示损伤变量， b 是相场参数， Δd 是相场变量的梯度， D 为损伤驱动力，层裂由拉伸部分体应变能驱动，表示为：

$$D = - \int_v^t H(-\bar{p}) \bar{p} \frac{dV}{V} \#(7)$$

$H(x)$ 仍为Heaviside函数， $\omega(d)$ 和 $\alpha(d)$ 分别是材料的能量释放函数和裂纹几何函数，分别为

$$\omega(d) = \frac{(1-d)^m}{(1-d)^m + a_1 d \cdot P(d)} \quad \text{with } P(d) = 1 + a_2 d + a_3 d^2 \#(8)$$

$$\alpha(d) = 2d - d^2 \#(9)$$

依据Zhang^[21]等研究结果，层裂应为指数衰减形式， a_1 应为如下形式：

$$a_1 = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{l_{ch}}{b} \quad \text{with } l_{ch} = - \frac{dp}{dV/V} \cdot \frac{G_f}{f_t^2} \#(10)$$

即表示Griffith特征长度 l_{ch} 中，杨氏模量 E_0 用非线性体积模量 $-dp/(dV/V)$ 替换，其余参数 $m = 2.5$ ； $a_2 = 0.1748$ ； $a_3 = 0$ 。

依据上述求得损伤后，即可通过含损伤本构关系得到损伤材料的应力，损伤下的球偏分解形式为：

$$\sigma = \frac{\partial \psi_\epsilon(\epsilon, d)}{\partial \epsilon} = \frac{\partial \psi_0(\epsilon)}{\partial \epsilon} + \omega(d) \frac{\partial \psi_d(\epsilon)}{\partial \epsilon} \#(11)$$

其中, σ 为应力张量, ϵ 为应变, ψ_0 为耗散能, 与损伤无关; ψ_d 为存储能, 断裂发生后由 $\omega(d)$ 释放。

对比式(1), 得到损伤后压力和偏应力:

$$p = H(\bar{p})\bar{p} + H(-\bar{p})\bar{p}\omega(d) \quad (12)$$

$$s = \omega(d)\bar{s} \quad (13)$$

由于延性金属初始屈服强度较小, 本模型中未考虑温度软化, 应力软化可由屈服强度直接引入:

$$\sigma_Y = \omega(d)\bar{\sigma}_Y \quad (14)$$

σ_Y 为屈服强度; $\bar{\sigma}_Y$ 为无损材料屈服强度。

上述模型通过有限元方法进行求解, 具体可参考文献[21]。

1.2 随机性模型

为了引入不同的随机分布模型, 在进行有限元计算时为每个网格分配一个随机数, 以反映材料初始微结构的随机分布特征。该随机数用于赋值网格的材料属性, 本工作为屈服强度, 该网格材料的屈服强度为该随机数乘以完好材料屈服强度, 表示如下:

$$\sigma_Y = \sigma_{Y_0} \cdot rand, rand \sim Distributions(lb, ub) \quad (15)$$

其中, σ_{Y_0} 为完好材料的屈服强度, $rand$ 表示随机数, 其符合名为Distributions (本文考虑正态、对数正态、威布尔和均匀分布四种随机分布函数, Distributions为四者之一)的随机分布, ub, lb 分别为随机分布的上下界, 本文取 lb 为0.8, ub 为1.2, σ_Y 表示随机扰动后的实际屈服强度。下面给出不同分布的随机数生成方法。

1.2.1 均匀 (Uniform) 分布

均匀分布是一种基本的概率分布, 在给定的区间内, 所有值的出现概率相等。对于区间 $[lb, ub]$ 上的均匀分布, 其概率密度函数为:

$$f(x) = \frac{1}{ub - lb}, lb \leq x \leq ub \quad (16)$$

在数值实现中, 采用Fortran内置子程序RANDOM_NUMBER生成服从[0,1]区间均匀分布的随机数, 即此时 $ub = 1, lb = 0$ 。基于该均匀分布进行转化可得到另外几种分布随机数。

1.2.2 正态 (Normal) 分布

标准正态分布的概率密度函数 (Probability density function, PDF) 为

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] \quad (17)$$

其中, $\mu = 0$, 是标准正态分布的均值; $\sigma = 1$, 是标准正态分布的标准差。

对其概率密度函数积分得到累积分布函数(CFD) :

$$\phi(Z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^Z \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] dx \quad (18)$$

标准正态分布随机数可由均匀分布随机数 $U \sim Uniform(0,1)$ 逆变换^[41]得到, 其转换公式如下:

$$Z = \phi^{-1}(U), U \sim Uniform(0,1) \quad (19)$$

其中, $\Phi^{-1}(U)$ 为标准正态分布的累积分布函数 (Cumulative distribution function, CDF) 式(16)的逆函数 (即分位函数), 该变换得到的随机数 Z 服从标准正态分布 $N(0,1)$, 再对其进行变化:

$$X = \mu + \sigma \cdot Z \quad (20)$$

可得到任意正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的随机数。

1.2.3 对数正态 (Log-normal) 分布

如果随机变量 $X > 0$, 并且 $Y = \ln(X)$ 服从均值为 μ 、标准差为 σ 的正态分布, 那么 X 就服从对数正态分布, 常记为 $X \sim \text{Lognormal}(\mu, \sigma^2)$ 。

$$\text{对数正态分布的PDF为: } f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\ln(x) - \mu^2}{2\sigma^2}\right] \quad (21)$$

其中, μ 是底层正态分布的均值, σ 是底层正态分布的标准差 ($\ln(X)$ 的标准差), x 是随机变量, 且 $x > 0$ 。积分后的CDF为:

$$\Phi(Z) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^Z \exp\left[-\frac{\ln(x) - \mu^2}{2\sigma^2}\right] dx \quad (22)$$

生成符合对数正态分布的随机数, 首先需要通过式(17)生成符合标准正态分布的随机数, 再通过

$$X = \exp(\mu + \sigma \cdot Z) \quad (22)$$

生成符合对数正态分布的随机数, X 即为服从对数正态分布 $\text{Lognormal}(\mu, \sigma^2)$ 的随机数。

1.2.4 威布尔 (Weibull) 分布

威布尔分布是一个从材料断裂强度的最薄弱点概率特性导出的统计函数^[42], 其PDF为: $f_X(x; k, \lambda) = \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right], x \geq 0, k > 0, \lambda > 0$ (23)

λ 为尺度参数, 决定了分布的伸缩。 k 为形状参数, 决定了分布的形状: 当 $k < 1$ 时, PDF在 $x = 0$ 处发散; 当 $k = 1$ 时, 威布尔分布退化为指数分布; 当 $k > 1$ 时, 分布有一定的峰值位置。

$$F_X(x; k, \lambda) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right], x \geq 0, k > 0, \lambda > 0 \quad (24)$$

同理, 威布尔分布随机数同样可以由均匀分布随机数 $U \sim \text{Uniform}(0,1)$ 逆变换可以得到, 其转换公式如下:

$$X = \lambda(-\ln(U))^{\frac{1}{k}}, U \sim \text{Uniform}(0,1) \quad (25)$$

经公式(11)转化得到的 X 即服从目标Weibull分布随机数。

我们在计算的时候, 始终控制随机数在0.8-1.2之间。对于均匀分布, 得到[0-1]的随机数后通过

$$X = (ub - lb) \times \frac{x - x_{min}}{x_{max} - x_{min}} + lb \quad (26)$$

其中 $x_{max} = 1, x_{min} = 0, ub = 1.2, lb = 0.8$ 。其他分布直接截断0.8以下和1.2以上随机数 (此时概率密度已很小)。

我们将不同随机分布随机数生成方法编入abaqus vumat, 计算得到的初始随机数如图1所示 (图示区域包含100000个网格, 即生成了100000个随机数)。

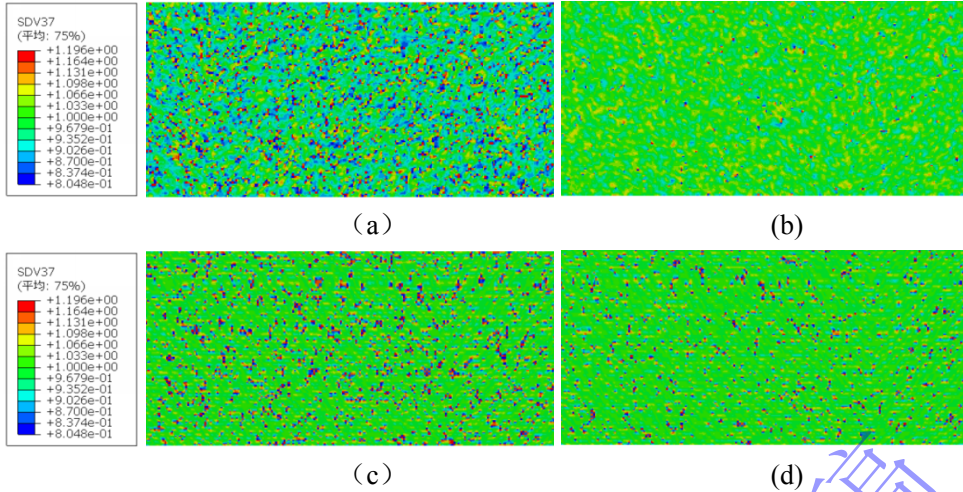


图1 四种分布下初始随机数云图

FIG. 1 Initial random number scatter plots under four distributions

统计图中随机数的概率密度，其和理论概率密度的对比如图2所示，表示该随机数生成方法可靠。

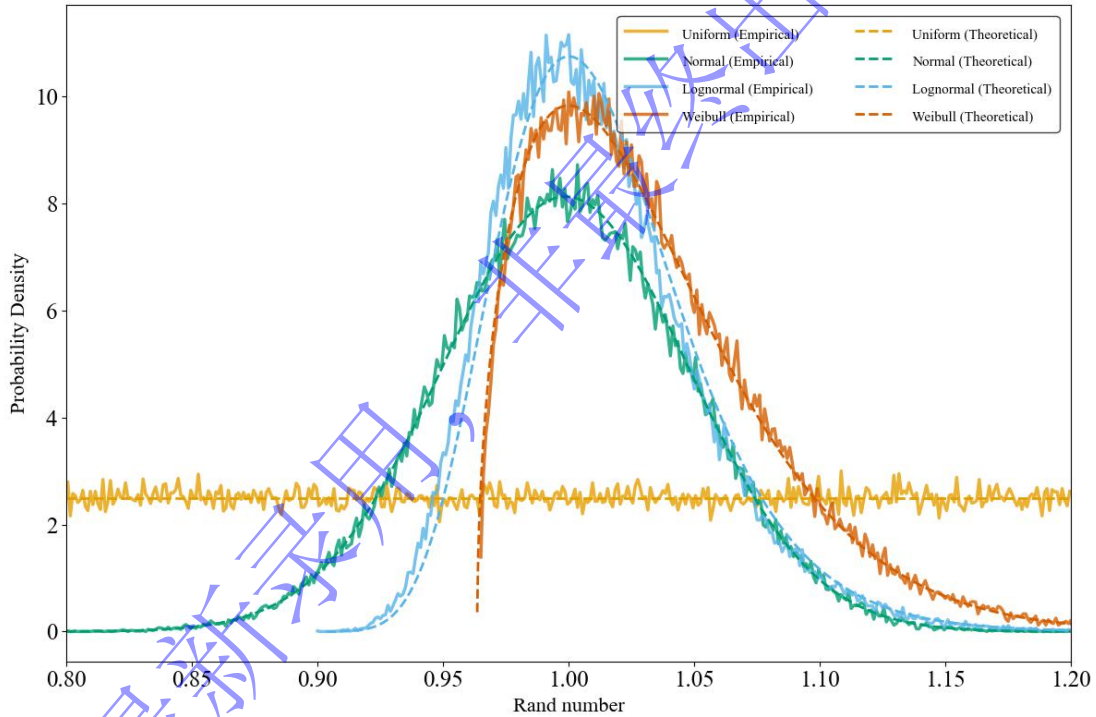


图2 不同分布下初始随机数的经验概率密度函数

FIG.2 Empirical probability density function of initial random numbers under different distributions

1.3 随机分布检验方法

得到初始随机数后，就可以进行考虑初始随机分布的层裂模拟，得到的模拟结果同样具有随机性，将对结果（本文检验了层裂强度和损伤分布）进行随机性检验，查看其分布特征。

1.3.1 Shapiro-Wilk 检验

为检验结果是否符合正态分布，使用Shapiro-Wilk检验方法^[43]，该方法尤其在小样本情形（样本数 $n < 50$ ）下具有较高的检验准确性^[44]。Python的科学计算库scipy提供了内置的

Shapiro-Wilk检验函数, 本文基于该函数完成检验。对检验数据, 该函数可得到 W 值(统计量)和 P 值(概率值), 其中 $W \in [0,1]$, 用于衡量数据与正态分布的吻合程度, W 值越接近1, 表明数据越服从正态分布, 通常认为 $W > 0.9$ 就表明正态性较好。 P 值是在数据服从正态分布的原假设下, 得到当前 W 值(或更极端的值)的概率。 P 值越大, 支持原假设的证据就越强。通常以0.05为显著性水平, 若 $P > 0.05$, 则没有充分理由拒绝原假设, 即认为数据服从正态分布。

1.3.2 Kolmogorov-Smirnov 检验

为检验结果是否符合威布尔分布, 使用Kolmogorov-Smirnov检验^[45, 46]。威布尔分布具有多变的分布形态, 且缺乏类似正态分布的简化线性检验方法, Kolmogorov-Smirnov检验由于不依赖于分布形状且不要求可线性化, 是验证威布尔模型可靠性的标准方法。该检验过程同样通过Python的科学计算库scipy完成, 通过该检验会得到 P 值(概率值), P 值越大, 支持原假设的证据就越强。通常以0.05为显著性水平, 若 $P > 0.05$, 则没有充分理由拒绝原假设, 即认为数据服从威布尔分布。

1.3.3 聚类算法

为提取损伤区域数量和尺寸特征, 本工作中将损伤超过0.9的连续单元簇视作一个独立完整的损伤区域, 并采用聚类算法^[47]将多层层裂碎裂区中连续的、失效的单元簇识别为一个独立的“损伤区域”。该算法有两个关键参数 ϵ 和MinPts, 其中 ϵ 为距离阈值, 判断两个单元是否相邻, 取为有限元模拟中单元尺寸的1.5倍, 确保空间上相邻且可能属于同一损伤区域的单元能被有效识别; 而MinPts为簇的起点, 设定为1, 意味着只要有1个高损伤单元即可被识别为一个簇的起点, 这有助于敏感地捕捉到层裂损伤成核的初期阶段, 从而统计其损伤区域的数量和尺寸大小, 分析其随时间和随机性标准差的演化规律。实际操作中在abaqus中运行python的聚类算法代码, 将模拟结果输入, 能自动统计出损伤数量和尺寸大小。

2. 单层层裂

2.1 算例及验证

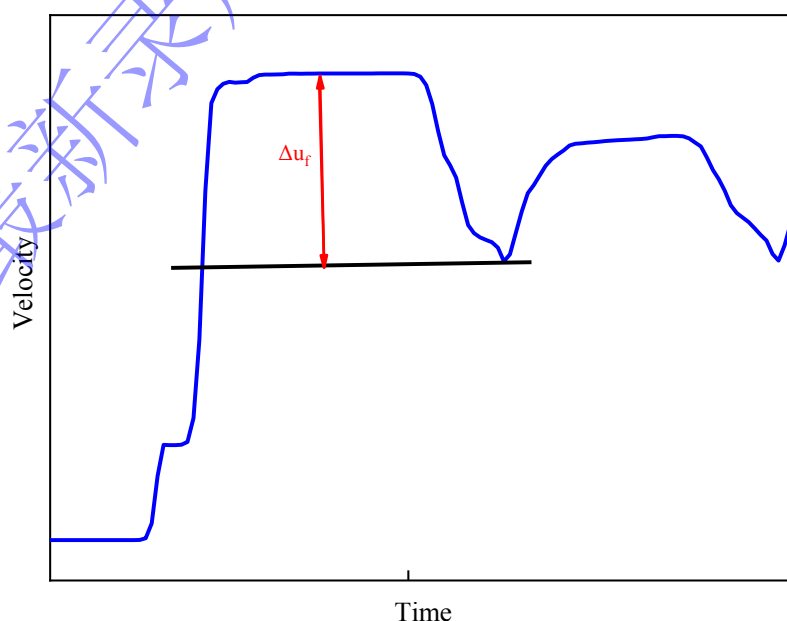


图3 自由面粒子速度

FIG. 3 Velocity of free surface particles

层裂自由面粒子速度曲线示意如图3所示，为本文模型验证的主要参考，从图中可以看出，层裂的典型特征是引起自由面粒子速度曲线回跳，第一平台速度（自由面速度的最大值）与第一速度极小值（回跳信号速度）之差 Δu_f 称为回跳速度，带入Novikov^[48]基于声学近似提出的层裂强度估算公式

$$\sigma_{sp} = \frac{1}{2} \rho c_0 \Delta u_f \quad (26)$$

可得到层裂强度。其中， ρ 为材料密度， c_0 为声速（一般用零压声速近似）。

单层层裂以典型平板撞击实验作为验证，靶板与飞片厚度等实验数据^[49-50]如表1所示。对其进行二维平面应变模拟，构型如图4所示，加载速度、靶板与飞片厚度设置与实验一致，宽度取 $W=1.5 \text{ mm}$ （对应实际实验未受边界稀疏影响区域），上下表面采用固定边界条件模拟平面应变状态。飞片和靶板材料均为高导无氧铜（OFHC），Grüneisen状态方程和本构关系参数见表2，层裂相场模型参数见表3。经收敛性验证，网格尺寸为 $4 \text{ }\mu\text{m}$ 粒子速度曲线已收敛，因此本文网格尺寸取为 $h=4 \text{ }\mu\text{m}$ 。

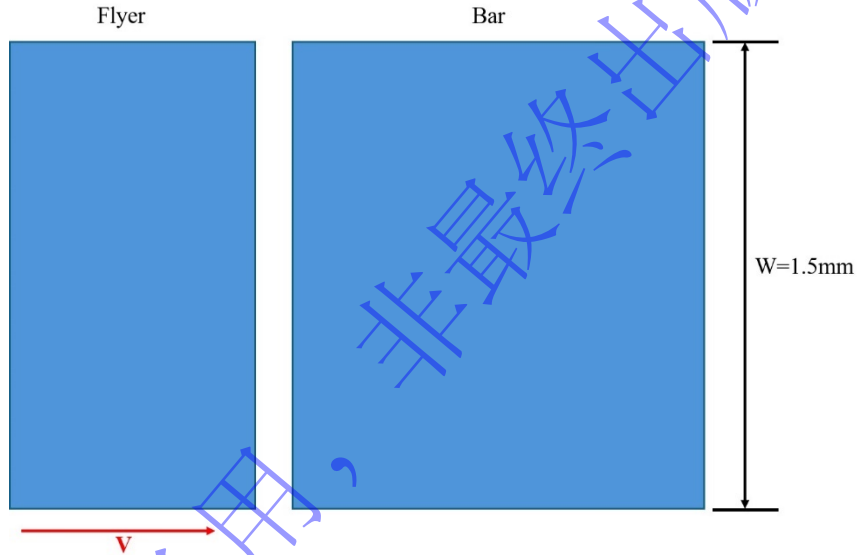


图4 平板撞击实验示意图

FIG. 4 Schematic diagram of plate-impact experiment

表1 平板撞击实验条件

TABEL 1 Configuration of plate-impact experiments

Experiment No.	Flyer thickness (mm)	Specimen thickness (mm)	Flyer velocity (m/s)	Spall strength (GPa)
A1	0.32	0.63	247	1.39
A2	0.42	0.82	246	1.30
A3	0.53	1.03	138	1.08
A4	1.04	2.05	118	0.85

表2 无氧铜状态方程和本构关系参数

TABEL 2 Parameters of constitutive and equation-of-state for OFHC

Constitutive	Shear modulus (Gpa)	A(Gpa)	B(Gpa)	n	C
--------------	---------------------	--------	--------	---	---

	46.6	0.23	0	0.34	0
EOS	$\rho_0(\text{g/cm}^3)$	$C_0(\text{m/s})$	S_1	γ_0	α
	8.924	3910	1.51	2.0	0

表3 无氧铜层裂相场模型参数

TABEL 3 Spall phase -field model parameters for OFHC

η (μs)	b (μm)	$G_f(\text{kJ/m}^2)$	$f_t(\text{Gpa})$
0.025	10	1	Consistency with Experiments

对表1四发实验进行模拟，粒子速度曲线结果如图5(a-d)所示。四组工况下自由面粒子速度曲线的波形特征、回跳幅值均与实验保持一致。其中，A3和A4两发实验的损伤分布如图5(e-f)所示，可以看出其分布模拟结果与回收试样观察结果相符，说明所采用的模型和参数能有效描述单层层裂。

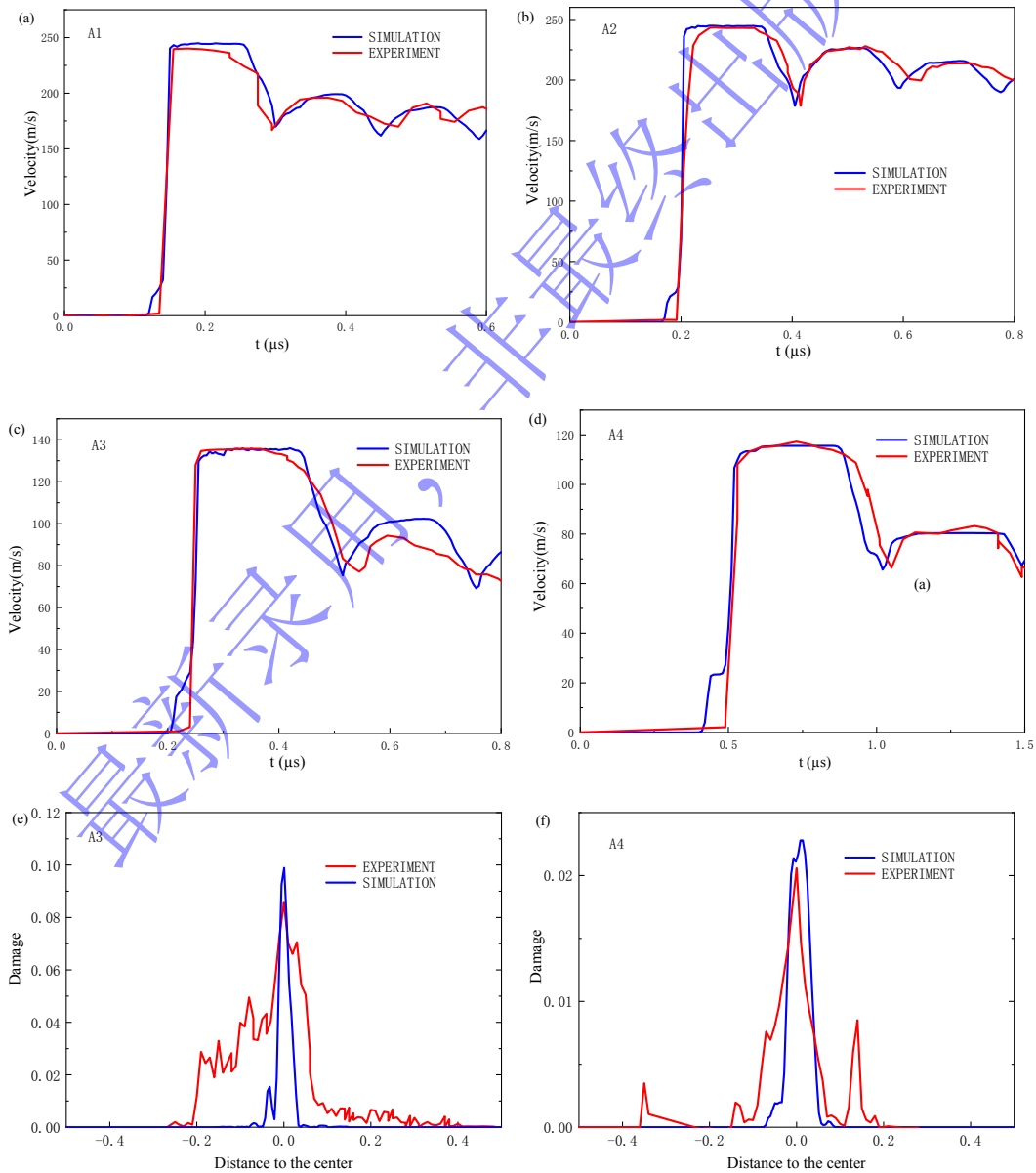
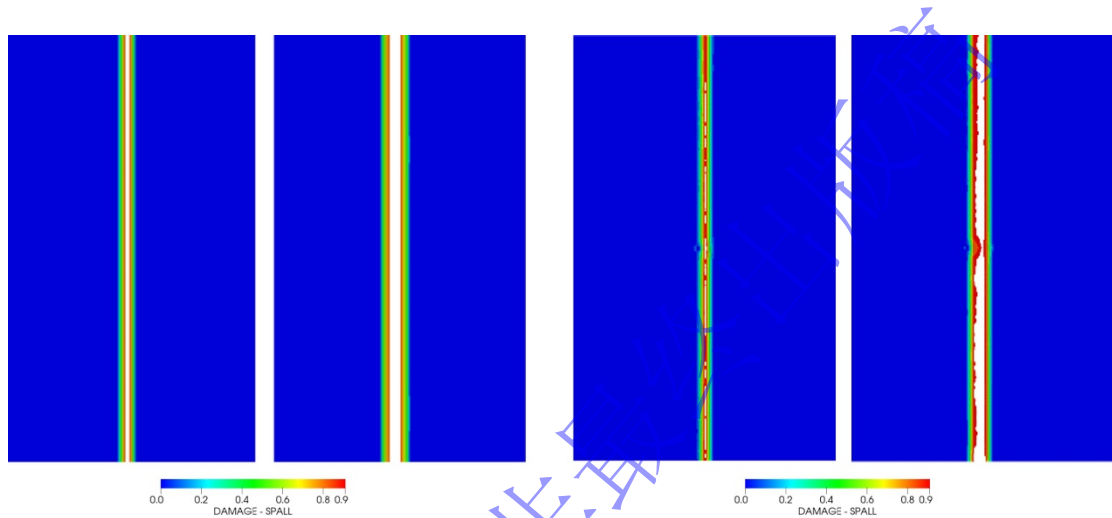


图5 (a)~(d)自由面粒子速度曲线和(e)~(f)损伤分布模拟与实验结果对比

FIG. 5 Comparison of free surface particle velocity curves (a)~(d) and damage distribution simulations and experimental results (e)~(f)

在此基础上，我们分析了初始屈服强度呈随机分布对层裂的影响，此处为正态分布，不考虑和考虑随机分布的层裂面模拟结果分别如图6a和图6b所示（图中损伤大于0.9的区域被删掉，以更好显示层裂裂纹，后文均如此）。不考虑随机分布时，从损伤萌生时的图像（图6a左图）可以看出，由于均匀形核，可直接形成了贯穿层裂面，且最终层裂面平整（图6a右图）。而考虑随机分布后，孔洞形核呈现出非均匀特征（图6b左图），且最终层裂面呈现起伏不定的图像（图6b右图），我们称之为层裂面粗化现象。与图6c所示的实验结果进行对比可以看出，由于真实材料总是存在大量缺陷，考虑随机分布模拟结果的层裂面形貌更接近于实验结果。

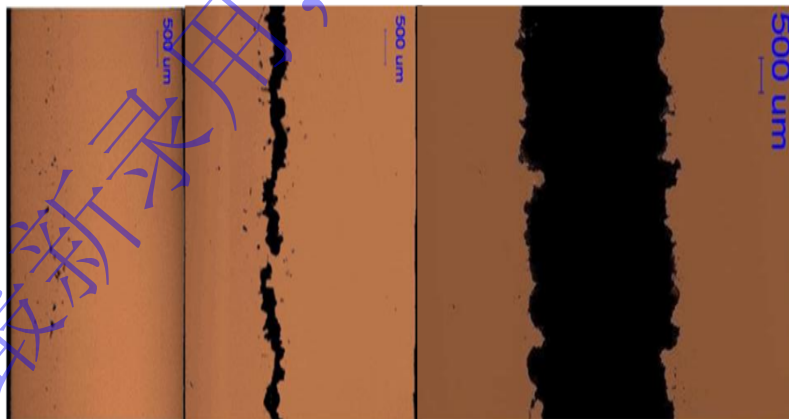


(a) 不考虑随机分布

(b) 考虑随机分布

(a) Ignoring random distribution

(b) Consider random distribution



(c) 冻结实验得到的层裂损伤演化过程^[49]

(c) Evolution process of spall damage obtained from freezing experiments^[49]

图6 单层层裂裂纹面

FIG. 6 Spall crack surface

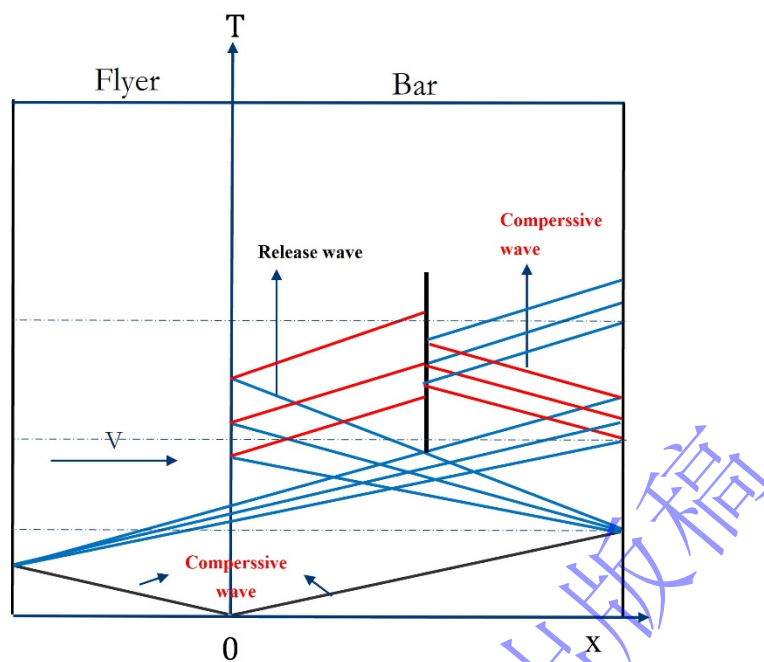


图7 平板撞击压力波系图

FIG. 7 Plate impact pressure Wave

对于上述单层层裂的形成过程，我们可以通过如图7所示的平板撞击示意图进行分析。在平板撞击层裂中，有无考虑随机不会对其完整层裂面的位置产生影响，只会对层裂面貌产生影响。其完整作用过程如下：当飞片以速度 V 撞击靶板时，在撞击界面处会产生一个初始的压缩波（compression wave），该波以一定的速度向靶板内部传播。由于材料的惯性效应和弹性性质，这个压缩波会使靶板内被照射到的区域应力状态发生突变，从初始的静应力状态迅速转变为高压的应力状态。随着压缩波在靶板中传播，当压缩波到达靶板的自由表面时，会发生波的反射形成稀疏波，当不同时刻产生的压缩波和稀疏波在靶板内部相遇并相互作用时，会在材料内部形成拉应力区域。如果这种拉应力超过了材料的动态拉伸强度，就会导致材料发生断裂，从而产生层裂现象。

2.2 随机分布下的层裂强度

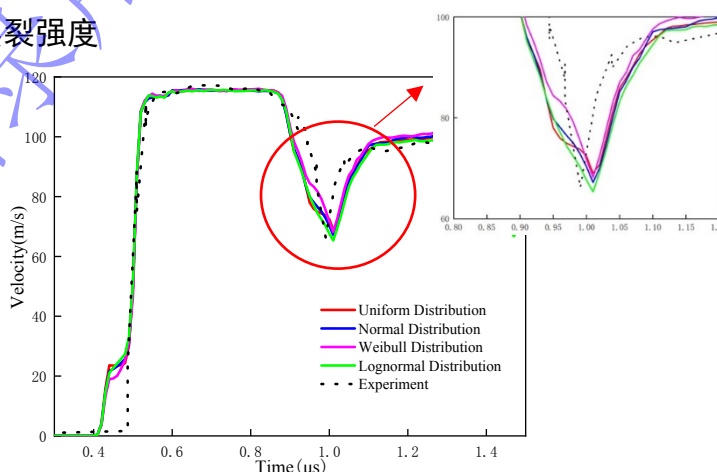


图8 不同分布下自由面粒子速度曲线与实验结果的对比

FIG. 8 Comparison of free-surface particle velocity curves under different distributions with experimental results

在此基础上，我们改变随机分布模型，得到不同分布下自由面粒子速度曲线，与实验结果对比如图8所示。可以看出，不同随机分布对自由面粒子速度曲线影响较小（进一步验证了模型准确性），但仍存在微小差异。对不同分布下的微小差异进行分析，对表1所述四

发实验，在四种分布下各进行10次模拟，统计其层裂强度平均值，结果如图9(a)所示，再对同一分布不同实验下的绝对误差取平均值，误差平均值及误差棒如图9(b)所示。可以看出，四种初始随机分布中，对数正态分布在层裂强度统计误差意义下表现出相对更小的平均误差及误差离散。然而，这一结论主要基于层裂强度这一统计指标，这是由于在自由面粒子速度波形及损伤形貌层面，四种分布模型与实验结果整体趋势相对一致，且彼此之间的差异相对有限，但损伤演化形貌无法与真实实验中的单发实验做出明确对比，为定量说明其主要区别，本工作中选取层裂强度作为判定依据进行研究。同时根据T.Sakai^[29]等曾提出用对数正态分布表征屈服强度、冲击能、疲劳寿命及裂纹扩展相关参数的统计分布，并认为该分布能够较好反映金属材料强度相关参数的右偏统计特征。结合本文无氧铜材料较为均匀的微观结构特性及上述研究结果，可以认为，在本文所研究材料与工况范围内，使屈服强度服从对数正态分布是一种具有工程实用性的随机建模选择。但该结论主要是基于模型预测，仍具有材料与工况依赖性，其普适性有待在更多延性金属中进一步验证。

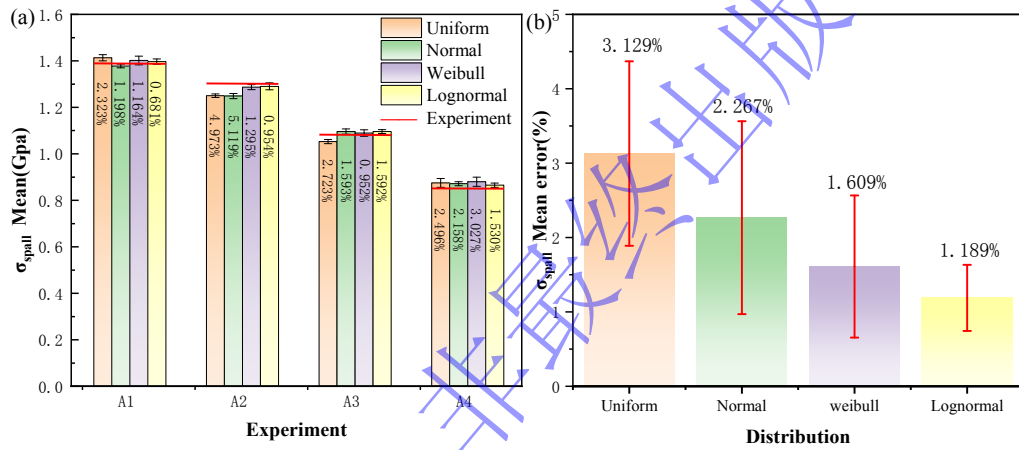


图9 (a)不同分布下四发实验层裂强度与实验对比和(b)误差的误差棒图

FIG. 9 (a) Comparison between experimental and spall strength of the four experiments under different distributions and (b) error bar chart of the errors

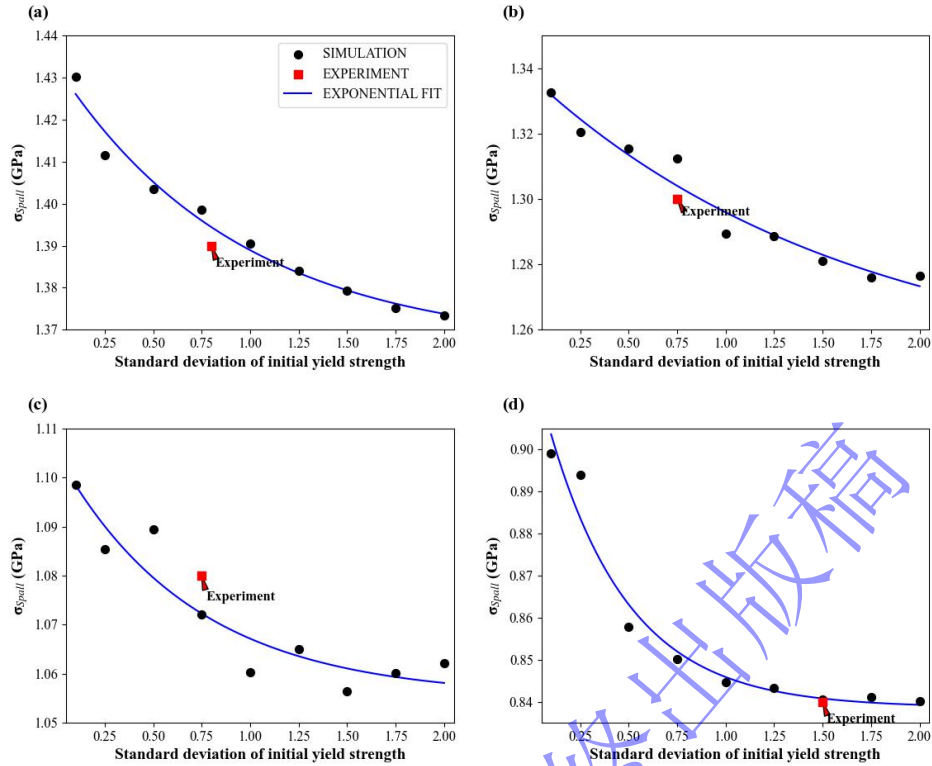


图10 层裂强度与对数正态分布标准差的关系:(a)~(d)为A1~A4四发实验

FIG. 10 Relationship between spall strength and the standard deviation of the log-normal distribution:(a)~(d) represent the four experiments A1 to A4

在此基础上,分析层裂强度与对数正态分布标准差的关系。进行了不同标准差的层裂模拟,层裂强度的平均值统计结果如图10所示。可以看出,随初始屈服强度标准差增大,层裂强度呈单调下降趋势。这一现象表明,当随机性幅度增大时,材料中更容易出现极端弱点区域,这些区域在应力波加载初期即进入快速损伤演化阶段,从而提前触发局部失稳,该趋势在物理上符合局部最薄弱区优先失效的最弱链机制^[51, 52],即宏观层裂强度主要受最早发生失稳的局部区域所控制,而非由材料整体平均强度所决定。

2.3 层裂强度的分布

进一步考察不同随机分布对层裂强度分布结果的影响(这里考虑了正态、对数正态和Weibull分布,均匀分布因无分布参数而未考虑)。对于正态分布、对数正态分布,通过在合适区间内(区间太大会导致层裂强度偏离实验值太多)改变其标准差,可得到不同标准差下的层裂强度结果;对于威布尔分布,通过改变其形状参数,可得到不同形状参数下的层裂强度结果。每个值为一组计算工况,每组进行20次层裂模拟,并给出各组层裂强度的统计结果。结果如图11所示,为特定标准差或形状参数下层裂强度结果(其他标准差下结果类似),对其层裂强度样本进行正态性检验的统计分析图,得到的概率密度函数与累积分布函数分别如图11右图与左图所示,其统计结果与理论值拟合效果较好。为进一步量化其分布形态,我们对所有样本进行了Shapiro-Wilk正态性检验,检验结果如表4所示。从表4中可以看出, P 值均大于0.05且 W 值均接近1,表明无论输入是何种随机分布,其输出量(层裂强度)均服从正态分布。即在层裂过程中,输出不确定性的分布形态对输入分布的具体形式不敏感,展现出一种稳定的统计规律。与本工作类似,在相場框架下,层裂的形成并

非由单一孔洞或局部缺陷触发，而是由多个空间位置上孔洞成核、长大与相互作用的过程协同控制。不同位置处的初始屈服强度随机性、局部应力三轴度的差异以及应力波到达时序的微小偏移，共同决定了局部损伤演化速率与最终贯通时刻。结合GREDELJ等^[53]的研究工作，该结论认为对于一个结构存在多个失效模式，系统的总失效概率分析极其复杂，但由它们综合或导出的、决定结构是否失效的变量，其分布可以近似为正态分布。是即宏观层裂强度可被视为一系列相互独立或弱相关随机变量（如局部屈服强度、孔洞生长速率、局部加载历程）的加权叠加结果。根据中心极限定理，当多个随机因素对同一宏观量产生累积影响时，其总体分布趋向于正态形式。因此，尽管初始随机变量的分布类型不同，最终层裂强度仍表现出对输入分布形式不敏感的正态特征。

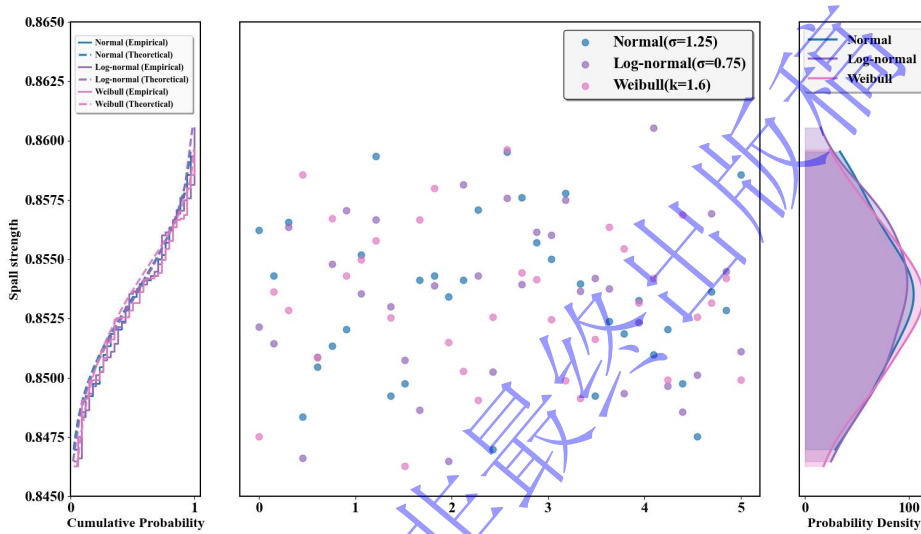


图11 不同初始随机分布下层裂强度分布的概率密度分布和累积分布函数

FIG. 11 PDF and CDF of spall strength distribution under different initial random distributions

表4 不同初始随机分布下的Shapiro-Wilk检验结果

TABEL 4 Shapiro-Wilk test results under different initial random distributions

Normal distribution									
σ	0	0.25	0.5	0.75	1.0	1.25	1.50	1.75	2.0
Value									
w	0.968	0.954	0.965	0.968	0.955	0.982	0.972	0.961	0.965
p	0.649	0.385	0.606	0.678	0.364	0.819	0.747	0.514	0.621
Log-normal distribution									
σ	0	0.25	0.5	0.75	1.0	1.25	1.50	1.75	2.0
Value									
w	0.956	0.962	0.961	0.981	0.970	0.957	0.953	0.964	0.950
p	0.414	0.524	0.506	0.824	0.714	0.4388	0.372	0.567	0.324
Weibull distribution									
k	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
Value									
w	0.967	0.950	0.971	0.957	0.963	0.990	0.963	0.937	0.937
p	0.636	0.330	0.765	0.489	0.615	0.986	0.615	0.214	0.210

2.4 小节

该部分通过对平板撞击单层层裂实验的模拟，系统研究了不同初始随机分布（均匀分布、正态分布、对数正态分布和威布尔分布）对单层层裂行为的影响。研究表明：1.引入表征材料缺陷的初始随机分布，损伤的空间分布由规则转为非均匀，成功复现了实验观察到的层裂面粗化现象；2.材料初始屈服强度呈对数正态分布，模拟结果的平均层裂强度与实验偏差最小，更适用于描述材料的真实随机特性；3.层裂强度随初始分布标准差增加而减小，符合失效的最弱链机制；4.无论初始缺陷服从何种随机分布，层裂强度的均服从正态分布，即模拟测得的层裂强度值会聚集在一个平均值附近，极端层裂强度值出现的概率较低。

3. 多层层裂

3.1 算例及验证

本节以文献[54]激光加载下铝板多层层裂实验作为算例，铝板厚度为250 μm，实验条件及层裂强度测试结果见表5。模拟采用指数衰减压力波形近似真实加载，如图12所示，峰值压力取 $p_{max}=27$ GPa，特征时间 $t_0=0.150$ μs。网格尺寸取为 $h=3$ μm。Grüneisen状态方程和Johnson-cook本构参数见表6，层裂相场模型参数见表7。

表5 激光加载层裂实验参数

TABEL 5 Loading parameters for laser-driven spall experiments

Experiment Number	Material	Bulk sound speed(m/s)	Density (g/cm ³)	Peak loading pressure (Gpa)	Spall strength (Gpa)
B1	Aluminum	5375	2.71	27	2.0

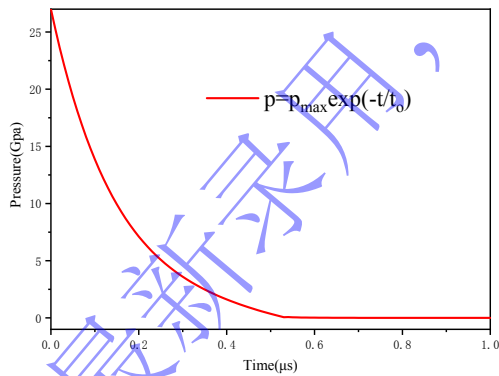


图12 指数衰减压力波形图

FIG. 12 Exponential decay pressure waveform

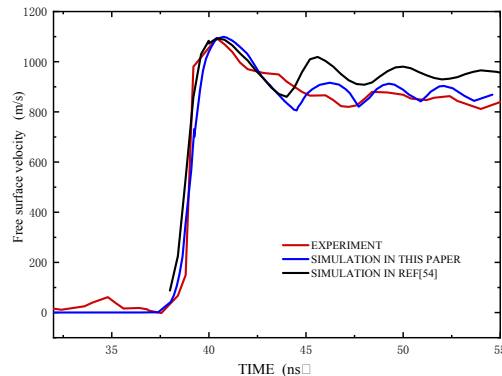


图13 自由面粒子速度曲线图

FIG. 13 Free surface particle velocity curve

自由面粒子速度曲线模拟结果与文献[54]实验结果对比如图13所示（图中对比了文献[54]的模拟结果），相比于文献模拟结果，本文模拟与实验更为吻合。

表6 铝的本构和状态方程参数

TABEL 6 Constitutive and equation-of-state parameters for Al

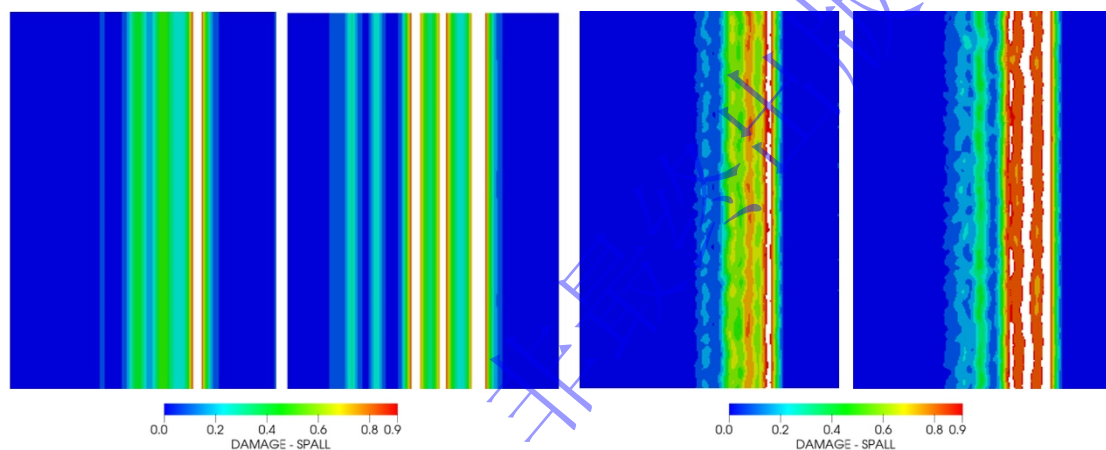
Constitutive	Shear modulus (Gpa)	A(Gpa)	B(Gpa)	k	C
--------------	---------------------	--------	--------	---	---

	26	1.67	3.0	0.34	0
EOS	$\rho_0(\text{g/cm}^3)$	$C_0(\text{m/s})$	S_1	γ_0	α
	2.71	5375	1.34	2.0	0

表7 铝的层裂相场模型参数

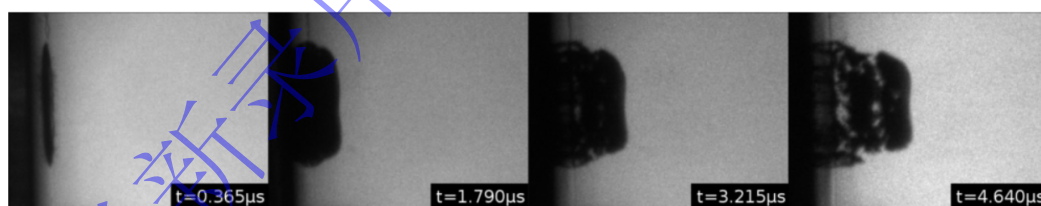
TABEL 7 Spall phase-field model parameters in Al

η (μs)	$b(\mu\text{m})$	$G_f(\text{kJ/m}^2)$	$f_t(\text{Gpa})$
0.01	6	1	2.0



(a) 不考虑随机分布
(a) Ignoring random distribution

(b) 考虑随机分布
(b) Consider random distribution



(c) 实验结果^[54]

(c) Experimental results^[54]

图14 多层层裂裂纹形貌

FIG. 14 Multispl cracking morphology

图14为多层层裂裂纹形貌，(a)-(c)分别为不考虑随机分布模拟结果，考虑随机分布模拟结果和实验结果。可以看出，如图14(a)所示，不考虑随机分布时，样品形成规则的三层层裂面，层裂面近似平直，层间间距规律性强；考虑随机分布后，如图14(b)所示，样品不能形成规则的三层层裂裂纹，不同层的裂纹通过网络状裂纹扩展相互贯通，这种层裂裂纹分布更接近于实验得到的碎裂图像（图14(c)）。

3.2 多层层裂形成过程

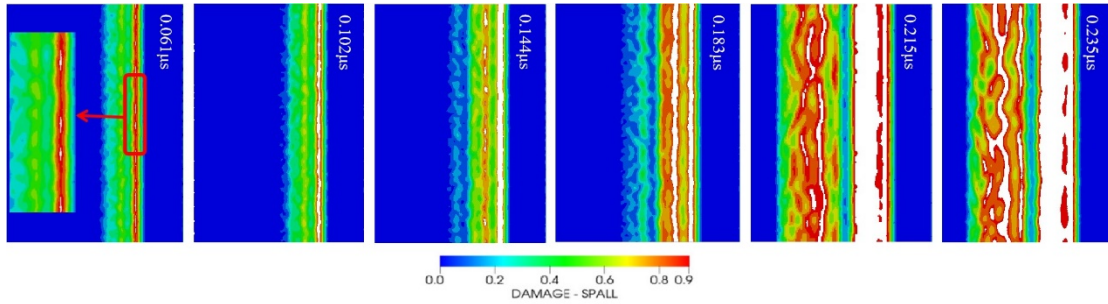


图15 多层层裂损伤演化过程

FIG. 15 Evolution process of multisplall damage

图15为不同时刻下多层层裂损伤及裂纹分布，从图中可以看出，在 $0.061 \mu\text{s}$ 时，材料内部在拉伸应力波作用下开始出现离散的微观孔洞。随着时间推进（ $0.102 \mu\text{s}$ ），这些损伤迅速聚集、长大，并贯通形成第一条连续的层裂面，层裂面呈粗化特征，与单层层裂一致。此后，由于第一层层裂位置处持续释放稀疏波，致第二层层裂面于 $0.144 \mu\text{s}$ 开始形成并在 $0.183 \mu\text{s}$ 贯通。随着加载继续，后续裂纹已不再平行于加载面，随机分布的间断裂纹通过拉伸和剪切等多种裂纹模式连通，从而形成网络状裂纹分布形貌。在 $0.235 \mu\text{s}$ 时达到终态，裂纹分布不再演化。结合实验结果可以推测，网络状裂纹是导致材料破碎的主要原因。

同时对于上述多层层裂的形成过程，我们可以通过其波系图进行分析。如图16所示，不考虑随机性时，多层层裂过程由应力波传播主导：右行压缩波从左侧传入，在自由面反射为左行稀疏波，其与右行稀疏波交汇形成拉伸应力区，导致层裂损伤在近似同步的条件下演化，形成规则、平直的层裂面。然而，考虑随机性后，损伤分布的形成过程呈现显著差异。时间上，层裂演化可视为应力释放过程；空间上，完整层裂面的形成是裂纹聚集过程的结果。在位置1处，与无随机情况类似，两束稀疏波在位置1相互作用，拉伸应力达到层裂强度，引起损伤演化。但由于随机扰动，材料微结构非均匀性导致损伤在空间上分布不均，使得应力释放过程不均匀。这种不均匀性引发向两侧发射的压缩波（如左行压缩波，对应图中红线）在产生时间和幅值上存在差异，即压缩波带有强扰动。在位置2处，左行压缩波追赶并削弱已传播的左行稀疏波，扰动随之向左传播。当扰动到达位置2时，影响该区域的损伤演化，损伤在空间上呈现间断裂纹和错位裂纹，这是由于扰动放大了局部薄弱点的激活，导致裂纹聚集过程偏离理想同步状态。在位置3处，由于距离位置1较远，大部分扰动未及时传播至此，右行稀疏波与未被扰动的左行稀疏波相互作用仍能形成相对均匀的拉伸区，因此层裂裂纹基本在同一平面内聚集，形成完整层裂面。

综上所述，考虑随机的损伤分布形成机制源于材料微结构随机性与应力波传播的耦合作用，初始缺陷的非均匀性通过应力释放波引入扰动，扰动传播逐级调制后续层裂的损伤模式，最终导致多层层裂面呈现粗化、间断和错位等复杂特征。这一过程凸显了随机扰动在动态损伤演化中的关键作用，为理解实际材料层裂行为提供了微观物理基础。

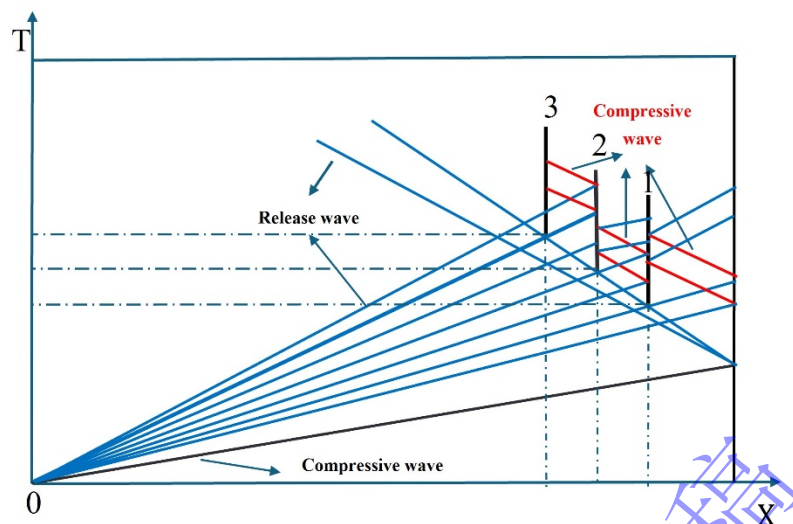


图16 三角形脉冲加载下多层层裂波系分析图

FIG. 16 Analysis diagram of multilayer delamination wave system under triangular pulse loading

3.3 层裂强度与对数正态分布标准差关系

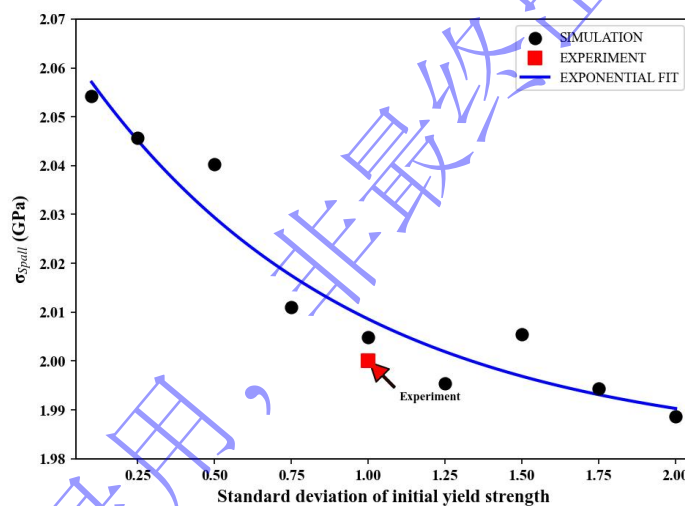


图17 多层层裂强度与对数正态分布标准差的关系

FIG. 17 Relationship between multi-spall strength and Log-normal distribution standard deviation

激光加载下，使初始屈服强度呈对数正态分布，通过改变标准差进行多组模拟，结果如图17显示，随着标准差增大，多层层裂强度同样呈降低趋势，这一研究结论与单层层裂研究结论相符，同样符合局部最薄弱区优先失效的最弱链机制。

3.4 损伤区域统计特征

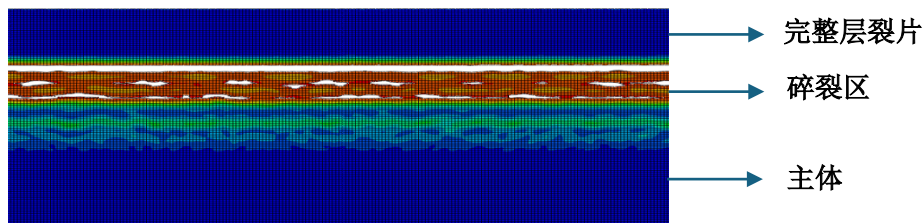


图18 多层层裂损伤区

FIG.18. Damage-zone of multisplall

如图18及图14(c)的实验结果所示, 多层层裂裂纹分布可分为三个特征区: 完整层裂片、多层层裂碎裂区及完好的主体部分, 碎裂区涉及群体性损伤区域的竞争性生长。该节将从“数量”和“尺寸”两个维度, 定量刻画多层层裂碎裂区中的损伤统计特征, 以此对其演化过程进行分析。如前文所述, 采用聚类算法^[44]提取碎裂区的损伤统计数据并对其进行以下分析。

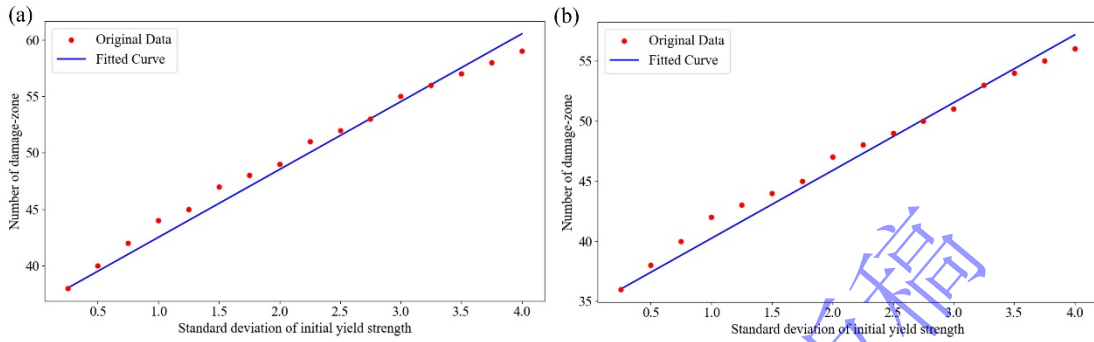
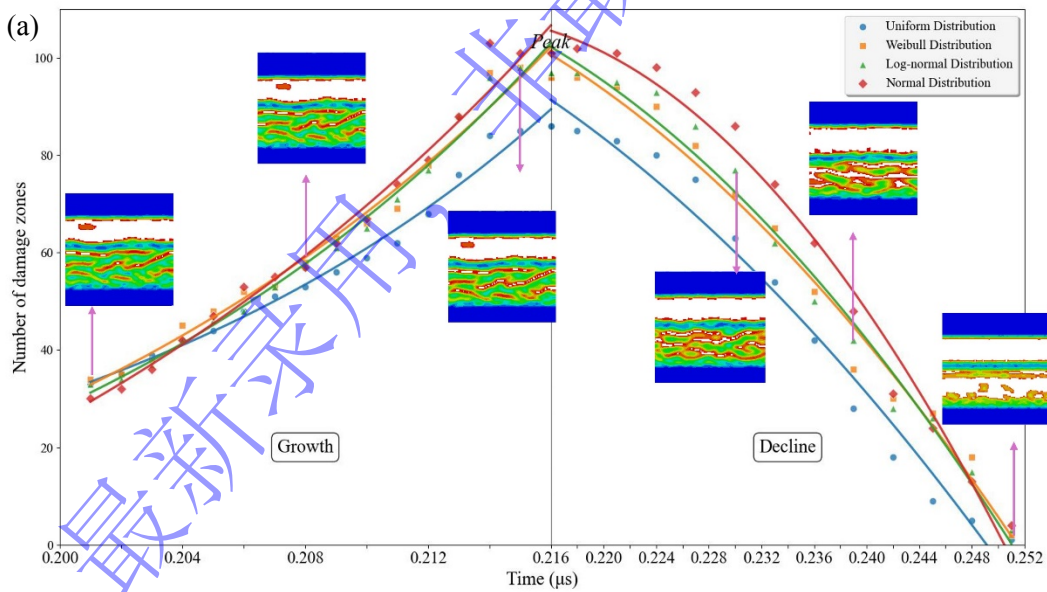


图19 损伤区域数量和初始强度标准差的关系:(a)正态分布, (b)对数正态分布

FIG.19 Relationship between standard deviation of initial yield strength and the number of damage-zone
:(a)Normal distribution,(b)Log-normal distribution

图19为损伤萌生阶段, 对于正态与对数正态分布情形, 损伤区域数量随屈服强度标准差的变化关系。损伤区域随标准差增大近似线性增长, 表明随机场离散度越大, 潜在薄弱点越多, 成核孔洞就越多, 从而显著增加损伤区域数量。



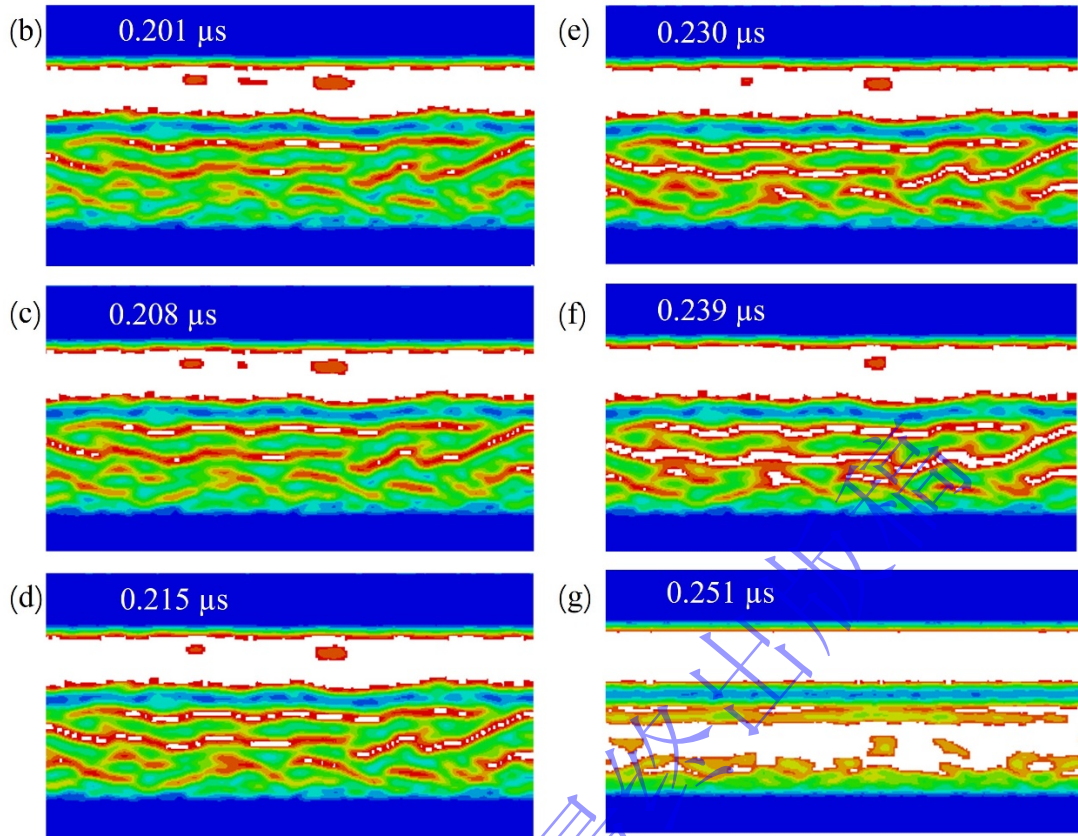


图20 (a)不同分布下损伤区域数量和(b)-(g)损伤汇聚图

FIG. 20 (a) the number of damage zone for different distributions and (b)-(g)the corresponding damage image

图20(a)给出了不同随机分布下多层次裂损伤区域数量随时间的演化过程，其中(b)-(g)是图20(a)中云图的放大图，其表示对数正态分布下损伤区域数量上升和下降部分时刻的损伤分布云图。从图20中可以看出，随着时间的演化，损伤失效区域数量呈先增加、随后加速增长、再转而减少的趋势，这对应了层裂损伤演化的典型过程：初期孔洞形核导致损伤区域数量快速增长，后期由于孔洞聚集贯通导致数量减少，图20中对应时刻的云图也呈现了这一过程。表8则为各分布下损伤区域数量达到峰值的时间，对比发现，正态分布最快达到其峰值，均匀分布最慢达到其峰值。从图20和表8可以看出，不同的分布对层裂过程也有一定的影响。均匀分布由于薄弱区域均匀地分布在0.8至1.2倍区间，损伤数量的增长和减少较其它分布缓慢；而正态分布概率密度集中在均值附近，最弱薄弱点相对较少，但可能由于空间分布更加随机，其损伤数量增速最大；对数正态分布和威布尔分布由于呈右偏特性（即大量样本中的表现是不对称的，大部分数值正常偏低，但存在少量的极大值，从而拉高了整体平均水平），因此初期形核数较正态分布多，但增长速率较缓。这表明，本文考虑的四种分布中，在不清楚材料初始随机分布的情况下，可用正态分布和均匀分布评估损伤区域数量演化过程，其结果可分别表示评估得到的损伤数量上下界。

表8 损伤区域数量峰值时间

TABEL 8 Time to peak number of damage zones

Distributions	Uniform	Normal	Log-normal	Weibull
Time(μ s)	0.216	0.214	0.215	0.215

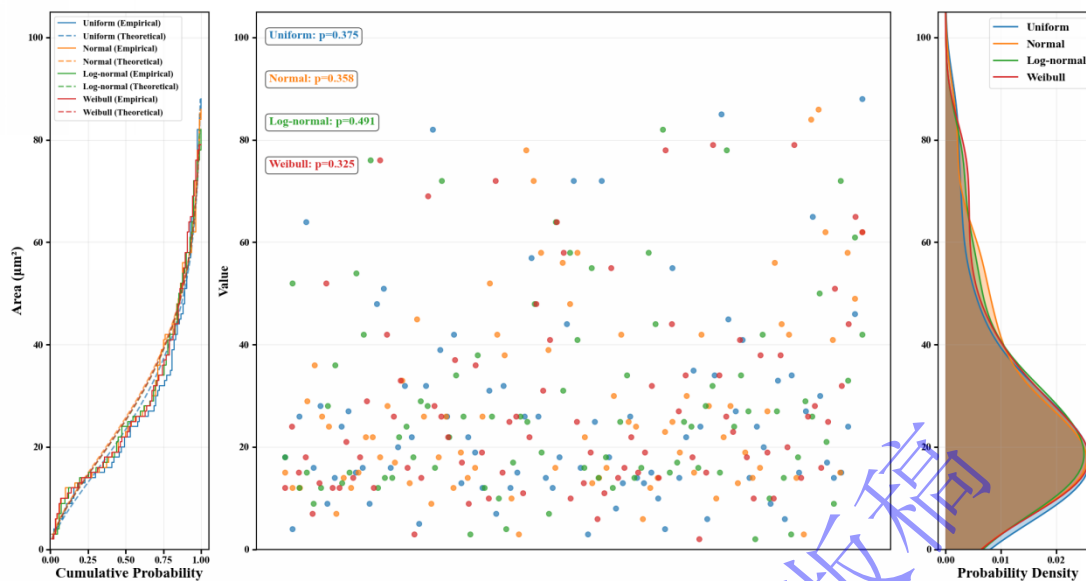


图21 损伤区域大小的概率密度函数和经验累积分布函数

FIG. 21 PFD and CFD of the damage area size distribution

统计损伤区域数量峰值时各损伤区域尺寸大小，采用最大似然法拟合Weibull分布，并通过Kolmogorov-Smirnov检验^[42, 43]进行一致性验证。结果如图21所示，三个子图分别从不同角度验证了数据与威布尔分布的拟合优度：左侧子图通过经验累积分布函数与理论威布尔分布曲线的对比，展示了实际数据与理论模型的一致性，表明损伤区域尺寸大小服从Weibull分布；中间子图的散点分布呈现了数据的离散情况，同时标注的K-S检验 P 值均远大于0.05，进一步通过统计检验证实了数据符合威布尔分布的假设；右侧子图的核密度估计曲线揭示了数据的概率密度形态，其平滑分布与威布尔分布的典型右偏特征相符。综合来看，这三个子图通过可视化对比、统计检验和概率密度分析三重验证，发现四组数据均能通过威布尔分布有效拟合。多层层裂中损伤区域尺寸呈现Weibull分布特征，从Zheng等^[55]和Tang等^[56]研究得出拉伸断裂下材料的碎片大小服从威布尔分布，其碎片大小与本工作中的损伤区域可近似理解为 $1-d$ 和损伤度 d 的关系，从严谨的数学统计可推导出当 $d \in (0,1)$ 服

从威布尔分布时， $1-d$ 亦可认为服从威布尔分布，与本文研究结果一致。从统计结果可以看出，大多数损伤区域的面积较小，存在少数面积较大的损伤区域。大量小面积损伤可能对应于损伤成核的早期阶段或材料中不同随机分布下的微缺陷被激活，而大面积损伤可能预示着局部损伤的长大和汇合过程，对最终失效起决定作用。由于屏蔽作用，在应力波加载条件下，不同空间位置处的孔洞由于初始强度差异及局部扰动其损伤区生长速率不同，初始损伤区大小也就不一致，而随着应力波的加载，损伤区域大的地方释放更多的应力，致使周围损伤区域小的地方其生长速率被抑制，同时局部损伤演化最快的区域往往率先发生失稳并形成贯通裂纹，从而限制了相邻区域的进一步扩展空间，即造成以上统计现象。

3.5 小节

本部分基于近似激光加载的指数衰减波加载下的多层层裂模拟，揭示了随机缺陷分布对多层层裂复杂损伤行为的影响。模拟结果显示：1.随机分布模型的引入使层裂界面从理想化的平直形态转变为粗化、起伏的真实形貌，成功再现了从微观孔洞形核到多条宏观裂纹竞争性贯通的完整过程；2.层裂强度同样随随机性标准差的增大而下降，与单层层裂结

论一致; 3.在损伤萌生阶段, 损伤区域的数量随标准差增大呈近似线性增长; 此外, 损伤区域数量随时间演化的规律(初始缓慢增长、随后加速、最终因孔洞聚集而下降)对应了层裂孔洞萌生与贯通的典型过程; 4.在损伤区域数量峰值阶段, 各分布下损伤区域的大小均服从Weibull分布。

4. 结 论

本工作通过将随机理论与相场层裂模型相结合, 系统揭示了表示材料微观缺陷的随机分布对延性金属层裂行为的统计规律。研究表明, 在本文所研究的无氧铜材料与工况范围内, 使屈服强度服从对数正态分布在层裂强度统计意义下表现出相对更小的偏差, 因而可作为一种具有工程实用性的随机建模选择。但该结论仍具有材料与工况依赖性, 其普适性有待在更多延性金属中进一步验证。进一步地, 不论初始屈服强度服从何种随机分布形式, 层裂强度均趋于正态分布, 且随随机性幅度增大而单调下降, 这一统计特征可从多随机因素叠加效应与最弱链失效机制的角度得到物理解释。在多层层裂中, 考虑随机分布的模拟成功再现了复杂的网络状裂纹形貌。对损伤区域的定量统计表明, 其数量演化规律与孔洞形核、竞争性长大及汇合三个阶段的物理过程一一对应; 在损伤区数量峰值时, 各分布下损伤区域尺寸分布均服从 Weibull 分布, 该特征可归因于屏蔽作用下的大损伤区释放更多应力使得小损伤区无法继续长大, 从而使得小损伤区域数量远大于大损伤区域。综上所述, 本文建立了材料初始随机分布模型与宏观层裂统计特性之间的关联关系: 层裂强度呈现稳定的正态统计特征, 损伤尺寸呈现 Weibull 型分布特征。这些结果为基于概率的材料动态可靠性分析与可靠性评估提供了物理可解释的理论依据。

致谢 感谢中国工程物理研究院院长基金自强项目(YZJJZQ2023001), 冲击波物理与爆轰全国重点实验室基金(2023JCJQLB05408), 国家自然科学基金(U2530209)对本研究工作的支持!

参考文献

- [1] ANTOUN T, CURRAN D R, RAZORENOV S V, et al. Spall fracture [M]. Springer, 2003.
- [2] CURRAN D R, SEAMAN L, SHOCKEY D A. Dynamic failure of solids [J]. *Physics Reports*, 1987, 147(5): 253-388.
- [3] NOELL P J, SILLS R B, BENZERGA A A, et al. Void nucleation during ductile rupture of metals: A review [J]. *Progress in Materials Science*, 2023, 135:101085.
- [4] DONGARE A M, RAJENDRAN A M, LAMATTINA B, et al. Atomic scale studies of spall behavior in nanocrystalline Cu [J]. *Journal of Applied Physics*, 2010, 108(11):113518.
- [5] DAS S. Effects of multiscale substructures on the effective behavior and field statistics of porous materials [J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2026, 207:106411.
- [6] RINEHART J S. Some quantitative data bearing on the scabbing of metals under explosive attack [J]. *Journal of Applied Physics*, 1951, 22(5): 555-560.
- [7] BREED B R, MADER C L, VENABLE D. Technique for the determination of dynamic-tensile-strength characteristics [J]. *Journal of Applied Physics*, 1967, 38(8): 3271-3275.
- [8] TULER F R, BUTCHER B M. A criterion for the time dependence of dynamic fracture [J]. *International Journal of Fracture*, 1968, 4(4): 431-437.
- [9] JOHNSON J N. Dynamic fracture and spallation in ductile solids [J]. *Journal of Applied Physics*,

- 1981, 52(4): 2812-2825.
- [10] SEAMAN L, CURRAN D R, SHOCKEY D A. Computational models for ductile and brittle fracture [J]. *Journal of Applied Physics*, 1976, 47(11): 4814-4826.
- [11] JOHNSON J N, ADDESSIO F L. Tensile plasticity and ductile fracture [J]. *Journal of Applied Physics*, 1988, 64(12): 6699-6712.
- [12] LEE H W, BASARAN C. A review of damage, void evolution, and fatigue life prediction models [J]. *METALS*, 2021, 11(4): 609.
- [13] MOLINARI A, JACQUES N, MERCIER S, et al. A micromechanical model for the dynamic behavior of porous media in the void coalescence stage [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2015, 71:1-18.
- [14] ZUREK A K, THISSELL W R, JOHNSON J N, et al. Micromechanics of spall and damage in tantalum [J]. *Journal of Materials Processing Technology*, 1996, 60(1): 261-267.
- [15] BONORA N, RUGGIERO A, MILELLA P P. Fracture energy effect on spall signal [J]. *American Institute of Physics Conference Proceedings*, 2004, 706(1): 439-442.
- [16] MOLINARI A, WRIGHT T W. A physical model for nucleation and early growth of voids in ductile materials under dynamic loading [J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2005, 53(7): 1476-1504.
- [17] THOUÉNON C, DUBOIS A, BARRAUD E, et al. Statistical modeling and generation of inertial ductile fracture surfaces [J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2025, 206:106406.
- [18] MIEHE C, SCHÄNZEL L-M, ULMER H. Phase field modeling of fracture in multi-physics problems. Part I. Balance of crack surface and failure criteria for brittle crack propagation in thermo-elastic solids [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2015, 294:449-485.
- [19] 张豪, 于继东, 裴晓阳, 等. 相场断裂方法发展概况 [J]. *高压物理学报*, 2019, 33(3): 030109.
Zhang, H, Yu, J D, Pei, X Y, et al. Development overview of the phase-field fracture method [J]. *Chinese Journal of High Pressure Physics*, 2019, 33(3): 030109.
- [20] WU J-Y. A unified phase-field theory for the mechanics of damage and quasi-brittle failure [J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2017, 103:72-99.
- [21] ZHANG H, PENG H, PEI X Y, et al. A phase-field model for spall fracture [J]. *Journal of Applied Physics*, 2021, 129(12):125903.
- [22] HAN H, WANG T, HUANG G, et al. Study of the dynamic impact spalling of ductile materials based on Gurson-type phase-field model [J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2024, 181:104106.
- [23] MA Xueshi, WANG Gangyao, WANG Jia. Dynamic phase field description on ductile fracture process [J]. *Transactions of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics*, 2024, 41(5): 564-574.
- [24] Ambati M, Gerasimov T, De Lorenzis L. Phase-field modeling of ductile fracture [J]. *Computational Mechanics*, 2015, 55(5):1017-1040
- [25] LIU Z, FAN T, LU Q, et al. Modeling of thermal shock-induced fracture propagation based on phase-field approach [J]. *Fluid Dynamics & Materials Processing*, 2025, 21(4): 851-876.
- [26] ZHANG H, PENG H, PEI X Y, et al. Phase-field modeling of coupled spall and adiabatic shear banding and simulation of complex cracks in ductile metals [J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2023, 172(105186).

- [27] FARACHE D, MISHRA S, TRIPATHI S, et al. Role of dislocations on martensitic transformation temperatures and microstructure: A molecular dynamics study [J]. *Journal of Applied Physics*, 2024, 136(3):035106.
- [28] DREMOV V V, CHIRKOV P V, KARAVAEV A V. Molecular dynamics study of the effect of extended ingrain defects on grain growth kinetics in nanocrystalline copper [J]. *Scientific Reports*, 2021, 11(1): 934.
- [29] SAITOH K I, KURAMITSU K, SATO T, et al. Molecular dynamics study on deformation mechanism of grain boundaries in magnesium crystal: Based on coincidence site lattice theory [J]. *Journal of Materials Science*, 2018, 2018(1): 4153464.
- [30] DANIELS H E. The statistical theory of the strength of bundles of threads. I [J]. *Proceedings Of The Royal Society A-mathematical Physical And Engineering Science*, 1945, 183(995):405-435.
- [31] ZBIGNIEW S. Statistical properties of the yield strength of normal strength hull structural steel plates [J]. *Analele Universității Dunărea de Jos din Galați Fascicula XI Construcții navale/ Annals of Dunărea de Jos of Galati Fascicle XI Shipbuilding*, 2019, 42:55-64.
- [32] SAKAI T, NAKAJIMA M, TOKAJI K, et al. Statistical distribution patterns in mechanical and fatigue properties of metallic materials [J]. *Materials Science Research International*, 1997, 46(6): 63-74.
- [33] NUKALA P K V V, SIMUNOVIC S. Scaling of fracture strength in disordered quasi-brittle materials [J]. *European Physical Journal B*, 2004, 37(1): 91-100.
- [34] HAAGENSEN P J. Statistical aspects of coexisting fatigue failure mechanisms in OFHC copper [R]. *UTIAS Technical Note No 112*, 1967, 1-25.
- [35] BHUIYAN M S, ANZUM T, FORHAD UL H, et al. Tensile strength study of stainless-steel using weibull distribution [J]. 2020, 2020, 8(2):1-6.
- [36] ONO K. A simple estimation method of weibull modulus and verification with strength data [J]. *Applied Sciences*, 2019, 9(8):1575.
- [37] WU J Y, NGUYEN V P. A length scale insensitive phase-field damage model for brittle fracture [J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2018, 119:20-42.
- [38] FRANCFORT G A, MARIGO J J. Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem [J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1998, 46(8): 1319-1342.
- [39] GRIFFITH A A. The phenomena of rupture and flow in solids [J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 221:163-198.
- [40] HALLQUIST J O. *LS-DYNA THEORETICAL MANUAL* [M]. USA: Livemore Software Technology Corporation, 1998.
- [41] SAAD F A, LEE W. Random variate generation with formal guarantees [J]. *Proceedings of the ACM on Programming Languages*, 2025, 9(152): 125-149.
- [42] WEIBULL W. *A statistical theory of the strength of materials* [M]. Sweden: Stockholm, Generalstabens litografiska anstalts förlag, 1939.
- [43] SHAPIRO S S, WILK M B. An analysis of variance test for normality (complete samples) [J]. *Biometrika*, 1965, 52:591-611.
- [44] GHASEMI A, ZAHEDIASL S. Normality tests for statistical analysis: a guide for non-statisticians [J]. *International Journal of Endocrinology and Metabolism*, 2012, 10(2):486-489.
- [45] MASSEY JR F J. The Kolmogorov-Smirnov test for goodness of fit [J]. *Journal of the American Statistical Association*, 1951, 46(253): 68-78.
- [46] KOLMOGOROV A N. Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione [J]. *Giornale*

- dell'Istituto Italiano degli Attuari, 1933, 4:83-91.
- [47] ROSENFELD A, PFALTZ J L. Sequential operations in digital picture processing [J]. Association for Computing Machinery, 1966, 13(4): 471-494.
- [48] NOVIKOV S A. Shear stress and spall strength of materials under shock loads (review) [J]. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 1981, 22(3): 385-394.
- [49] PENG H, PEI X-Y, LI P, et al. Micro-damage characteristics of incipient spall in high-purity copper [J]. Acta Physica Sinica, 2015, 64(21): 216201.
- [50] 彭辉. 延性金属动态拉伸断裂的微损伤聚集特性研究 [D]. 北京理工大学, 2015:66-68.
Peng, H. Coalescence of micro-damage on dynamic tensile fracture of ductile metal [D]. Beijing Institute of Technology, 2015: 66-68.
- [51] VILGE B I, VILGE B B. Statistical concept of the "weakest link" in estimating strength and defects of chemically active composite materials [J]. Model Assisted Statistics and Applications, 2016, 11(1): 81-89.
- [52] TOL R S J, YOHE G W. The weakest link hypothesis for adaptive capacity: An empirical test [J]. Global Environmental Change, 2007, 17(2): 218-227.
- [53] GREDELJ S, HALILAGIĆ R. The application of central limit theorem in determining structural reliability[J]. Proceedings of the 13th International Scientific Conference on Production Engineering: Development and Modernization of Production, 2022: 1.
- [54] ROSENFELD A, PFALTZ J L. Sequential operations in digital picture processing [J]. Association for Computing Machinery, 1966, 13(4): 471-494.
- [55] Zheng Yuxuan, Chen Lei, Hu Shisheng, et al. Characteristics of fragment size distribution of ductile materials fragmentized under high strainrate tension[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2013, 45(4): 580-587.
- [56] 汤佳妮, 徐便, 郑宇轩, 等. 脆性膨胀环动态拉伸碎裂实验研究[J]. 爆炸与冲击, 2021, 41(1): 014101.
Tang J N, XU B, Zhang Y X, et al. Experimental study for dynamic fragmentation of brittle expansion rings[J]. Explosion And Shock Waves, 2021, 41(1): 014101.

Statistical Characteristics of Spallation Based on Stochastic Numerical Simulation

GUAN Youhao, ZHANG Hao, PEI Xiaoyang

(Institute of Fluid Physics, CAEP, Mianyang, 621999, Sichuan, China)

Abstract: This work integrates stochastic theory with a phase-field model for spallation in ductile metals. By assigning the initial yield strength four distinct random distributions to characterize the random distribution of material defects and employing an explicit dynamic solver, the entire process of spall damage—from gradual evolution to instability and coalescence—was successfully simulated. The simulation results were validated through plate impact experiments and triangular wave loading experiments. These validations revealed the relationship between the heterogeneity of material yield strength and both the spall strength and the number/area of damage zones. The results indicate a negative correlation between the standard deviation of the initial yield strength and the spall strength,

which holds for both single and multiple spall scenarios in ductile metals. For single spallation, regardless of the initial distribution of yield strength, the resulting spall strength follows a normal distribution. For multiple spallation, the number of initially nucleated damage zones increases linearly with the standard deviation, while the size of these zones follows a Weibull distribution. Under the same initial random distribution, the number of damage zones evolves over time, showing a trend of initial slow growth, subsequent acceleration until saturation, and a final decline after saturation. This trend corresponds to the typical process of damage evolution involving nucleation and coalescence during spallation.

Keywords: ductile metal; spallation; stochastic model; phase-field fracture model; distribution characteristics; dynamic damage

最新录用，
非最终出版稿