

我国高压物理领域
唯一专业期刊

高压物理学报

CHINESE JOURNAL OF HIGH
PRESSURE PHYSICS

界面不稳定性

2018

中国物理学会
高压物理专业委员会 主办

高压物理学报

GAOYA WULI XUEBAO

1987 年 9 月创刊

2018 年主题专刊

· 界面不稳定性 ·

目 次

密度非均匀流场中冲击加载双模态界面失稳现象的数值模拟	肖佳欣, 柏劲松, 王 涛
爆轰驱动铝飞层扰动增长的数值模拟	王 涛, 柏劲松, 曹仁义, 汪 兵, 钟 敏, 李 平, 陶 钢
一种提高极值点处精度的三阶 WENO-Z 改进格式及应用	徐维铮, 吴卫国
拉氏方法模拟二维多介质可压缩流体的运动	
.....	赵海波, 肖 波, 柏劲松, 段书超, 王刚华, 阚明先, 陈 芳
液-液斜界面 R-T 失稳特征的实验研究	江荣宝, 黄熙龙, 邹立勇, 施红辉, 吴 鋈
《高压物理学报》2018 年主题专刊名录	《高压物理学报》编辑部
2018 年“界面不稳定性”主题专刊论文引用信息	封 三



官方网站: www.gywlxb.cn

官方邮箱: gaoya@caep.cn

联系电话: 0816-2490042

密度非均匀流场中冲击加载双模态界面失稳现象的数值模拟^{*}

肖佳欣, 柏劲松, 王 涛

(中国工程物理研究院流体物理研究所, 四川 绵阳 621999)

摘要: 利用可压缩多介质黏性流动和湍流大涡模拟的二维计算程序 MVFT-2D, 针对初始非均匀流场密度为高斯分布、马赫数 $Ma=1.27$ 激波作用下的双模态界面失稳现象, 进行了数值模拟研究。数值模拟结果表明, 处于非均匀流场中的双模态振幅耦合效应较弱, 而且低密度区的初始大振幅界面扰动增长最快, 高密度区的初始小振幅界面扰动增长最慢。通过进一步分析可知, 在一定初始振幅范围内, 非均匀流场低密度区的振幅增长率较高, 混合区域更宽, 湍动能较大, 受初始振幅影响较大, 导致该区域界面不稳定演化较快。其变化规律与均匀流场呈现相反趋势, 说明非均匀流场界面不稳定性的发展规律与均匀流场存在较大差异。

关键词: 密度非均匀流场; Richtmyer-Meshkov 不稳定性; 初始扰动; 数值模拟

中图分类号: O354.5

文献标识码: A

激波加载初始扰动下密度间断的界面会产生 Richtmyer-Meshkov(RM)不稳定性现象, 其产生机理是界面处密度、压力梯度不共线引起的斜压涡效应。对激波与交界面相互作用的研究不仅具有重要的学术意义, 而且具有重要的工程应用价值。超燃冲压发动机中的燃料混合以及发动机的结构设计^[1], 天体物理中超新星塌缩和爆炸、射流、超新星反弹强冲击波与外壳及周围非均匀星际云的相互作用^[2]以及惯性约束聚变^[3-6]等都需要考虑界面不稳定性。

近年来, 关于界面不稳定性的研究已经成为国际学术和工程界热点研究课题之一, 在理论、数值模拟和实验方面均已取得较大的进展, 并发现初始条件对界面不稳定性的演化有重要的影响。为使超燃发动机中燃料和氧化剂快速有效混合, Yang 等^[1]对气柱界面的不稳定性进行了数值模拟, 最终确定密度比等 7 种因素对圆柱 RM 界面不稳定性发展的影响较大。Kumar 等^[7]对三气柱 RM 界面不稳定性进行了实验研究, 发现气柱之间下游的扩散材料越多, 漩涡结构的耦合联结就越强烈。Orlicz 等^[8]通过实验研究了无膜 SF_6 气帘在马赫数 $Ma=1.2$ 和 1.5 激波冲击下界面不稳定性的演化过程, 发现随着马赫数的增加, 尖钉、气泡尺寸越大, 后期湍流混合现象越明显。

然而, 之前学者主要关注均匀流场的情况, 对非均匀流场的研究较少。流场的非均匀性是影响界面不稳定性发展的重要因素, 对可变密度流体力学界面不稳定性研究是美国 Los Alamos 国家实验室 MaRIE 计划^[9]研究要点之一。刘金宏等^[10]开展了平面激波冲击非均匀流场界面的激波管实验, 并利用阴影技术获得了各扰动区域的线性、非线性发展图像, 发现低密度区域界面扰动增长较快。Bai 等^[11]结合实验数据, 构造初始非均匀流场, 通过数值模拟研究发现, 满足高斯分布的初始流场密度能准确地描述实验流场, 并且经过进一步研究^[12]发现: 加载前的线性和弱非线性阶段, 流场的非均匀性对不稳定性的演化具有相当大的影响; 而加载后的强非线性阶段, 非均匀性效应急剧衰减。在之前工作^[11-13]基础

^{*} 收稿日期: 2017-01-04; 修回日期: 2017-03-13

基金项目: 国家自然科学基金(11532012, 11372294); 科学挑战专题(JCKY2016212A501); 挑战计划(TZ2016001)

作者简介: 肖佳欣(1992—), 女, 硕士研究生, 主要从事流体力学研究. E-mail: crystalshaw1125@126.com

通信作者: 柏劲松(1968—), 男, 研究员, 博士生导师, 主要从事计算力学研究. E-mail: bjsong@foxmail.com

上,为了深入研究初始扰动因素对非均匀流场界面不稳定性发展的影响机理,本工作利用 MVFT (Multi-Viscous Flow and Turbulence) 程序,通过数值模拟研究激波 $Ma=1.27$ 、初始非均匀流场密度为高斯分布情况下多组初始振幅组合的双模态界面不稳定性演化的演化,并与均匀流场数值模拟结果进行对比,分析初始扰动及流场密度非均匀性对界面不稳定性演化的影响。

1 计算方法

数值模拟使用适用于可压缩多介质黏性流场的大涡模拟程序 MVFT,该程序可精确地模拟多介质流场中激波冲击密度间断界面的演化过程。MVFT 的基本控制方程组是基于考虑黏性和热传导的可压缩多介质 NS 方程,通过 Favre 滤波后,略去非线性项,表示为如下张量形式

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_j}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_j \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} = \frac{\partial (\sigma_{ij} + \tau_{ij})}{\partial x_j} \\ \frac{\partial \bar{\rho} \bar{E}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{u}_j \bar{E} + \bar{p} \tilde{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial (q_j + Q_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial [\tilde{u}_i (\sigma_{ij} + \tau_{ij})]}{\partial x_j} \\ \frac{\partial \tilde{Y}^{(s)}}{\partial t} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{Y}^{(s)}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(D \frac{\partial \tilde{Y}^{(s)}}{\partial x_j} \right), \quad s=1,2,3,\dots,N-1 \end{array} \right. \quad (1)$$

式中: i, j 表示 x, y, z 方向,当 i 和 j 相同时,表示对指标进行求和; $\bar{\rho}, \tilde{u}_i, \bar{p}$ 分别为可解尺度流体密度、流体速度、流体压强; $\bar{E}$ 为单位质量的总能量; N 为流体的种类数; $\tilde{Y}^{(s)}$ 为第 s 种流体的体积分数; D 为扩散系数,满足 $D=\nu/S_c$,其中 ν 为流体运动黏性系数, S_c 为施密特数。

黏性应力张量为

$$\sigma_{ij} = \mu_l \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \right) \quad (2)$$

亚格子尺度(SGS)应力张量为

$$\tau_{ij} = \rho(\tilde{u}_i \tilde{u}_j - \widehat{u_i u_j}) \quad (3)$$

另外, q_j 和 Q_j 分别为可解尺度和不可解尺度的单位时间空间的能量流,满足

$$\left\{ \begin{array}{l} q_j = -\frac{\lambda_l \partial T}{\partial x_j}, \quad \lambda_l = \frac{\mu_l c_p}{Pr_l} \\ Q_j = -\frac{\lambda_t \partial T}{\partial x_j}, \quad \lambda_t = \frac{\mu_t c_p}{Pr_t} \end{array} \right. \quad (4)$$

式中: μ 为流体黏性系数, c_p 为定压比热容, Pr_l 和 Pr_t 分别为可解尺度和不可解尺度的普朗特数。

利用算子分裂技术将该物理问题分解为无黏流量计算、黏性流量计算及热流量计算 3 个子过程。其中无黏流量可以通过两步 Lagrange-mapping 型的 PPM(Piecewise-Parabolic-Mapping) 方法进行计算,分为以下 4 个步骤:(1) 物理量分段抛物插值;(2) 近似求解 Riemann 问题;(3) Lagrange 方程的推进求解;(4) 物理量重新映射到固定的欧拉网格。在此基础上,使用二阶空间中心差分法和两步 Runge-Kutta 时间推进法求解黏性流量及热流量,具体数值方法见文献[12]。

2 计算结果与分析

在前期工作^[10]基础上,选择 20℃、1 个标准大气压下的空气和 SF_6 作为界面两侧的气体,气体参数见表 1,其中 γ 为比热比。初始计算模型如图 1 所示,界面为双模态的余弦扰动界面,波长均为 0.05 m,扰动平衡位置 $x=0.016$ m,B1 和 S1 对应界面初始振幅为 A_{01} 时波峰和波谷的位置;B3 和 S3 对应界面初始振幅为 A_{02} 时相应波峰和波谷的位置,虚线表示界面平衡位置。入射激波马赫数为 1.27,初始激波位置在界面左侧,界面右侧为 SF_6 密度非均匀流场,其沿 y 轴方向的密度满足高斯分布,即

$$\rho(y) = \rho_{SF_6} \exp[-(y-y_c)^2/\delta^2] \quad (5)$$

式中: $\delta=0.3279\text{ m}$, $y_c=0$ 。为了更加直观地获得密度分布,图 2 给出了均匀和非均匀流场密度沿 y 轴方向的变化情况。

表 1 气体参数

Table 1 Initial parameters of air and SF₆

Gas	Density/(kg · m ⁻³)	γ	$\eta/(10^{-6}\text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1})$	Pr_1	$D/(\text{cm}^2 \cdot \text{s}^{-1})$
Air	1.29	1.40	15.5	0.71	0.204
SF ₆	5.34	1.09	18.2	0.90	0.097

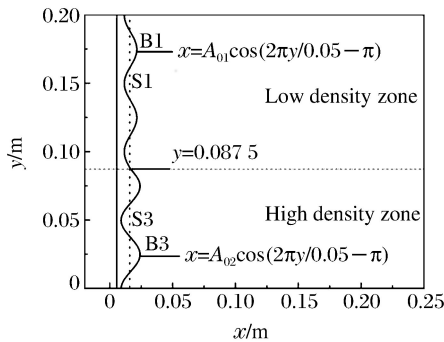


图 1 计算模型

Fig. 1 Computational model

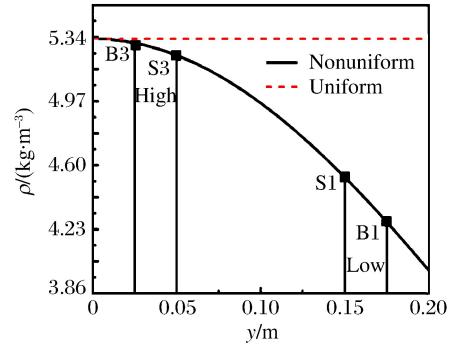
图 2 均匀和非均匀流场的 y 方向密度

Fig. 2 Density profiles of uniform and nonuniform flows

双模态界面的振幅如表 2 所示,共设置 7 组初始扰动振幅组合。计算区域为 $[-0.02\text{ m}, 0.25\text{ m}] \times [0, 0.20\text{ m}]$,模拟过程中网格划分为 540×400 ,右边界为流动边界。为了模拟界面演化至非线性阶段,取模拟时间为 2 ms 。界面初始振幅可以表示为

$$x = \begin{cases} A_{01} \cos(2\pi y/0.05 - \pi) & 0.0875\text{ m} < y < 0.20\text{ m} \\ A_{02} \cos(2\pi y/0.05 - \pi) & 0 < y \leq 0.0875\text{ m} \end{cases} \quad (6)$$

式中: A_{01} 和 A_{02} 为双模态的初始振幅。为分析流场密度梯度对激波和界面的影响,首先对初始界面无扰动时的非均匀流场进行数值模拟,得到其密度分布如图 3 所示。由图 3 可知,由于非均匀流场 y 方向在 1 ms 时存在密度梯度,导致界面和激波的倾斜,上方激波传播速度较快。

图 4 给出了不同初始振幅组合下均匀和非均匀流场的密度分布。由图 4 可知,均匀流场中,初始大振幅的界面演化快于初始小振幅的界面演化,但是对于非均匀流场,其演化规律出现了相反的趋势,位于非均匀流场低密度区的小振幅界面扰动赶上并超越了非均匀流场高密度区的大振幅界面,该现象说明初始流场的非均匀性对 RM 不稳定性的演化发展有重要的影响。

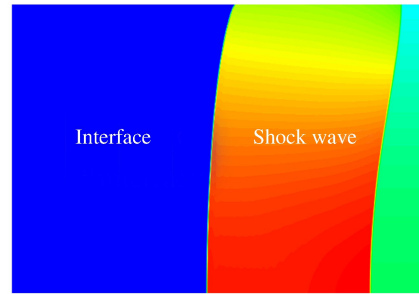
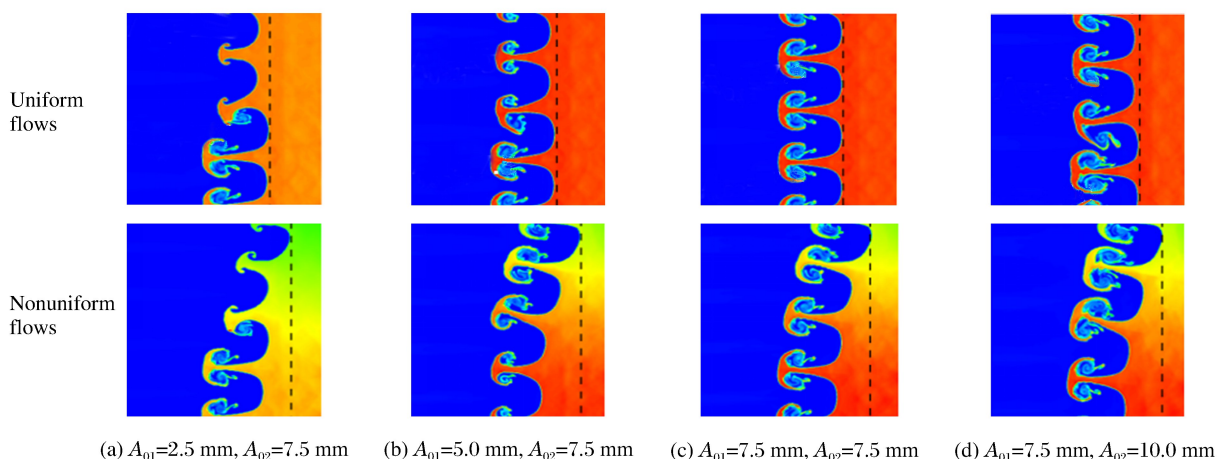
图 3 $t=1\text{ ms}$ 时非均匀流场无扰动界面的密度云图Fig. 3 Density images of nonuniform flow without perturbation on interface at $t=1\text{ ms}$

表 2 双模态界面的初始振幅

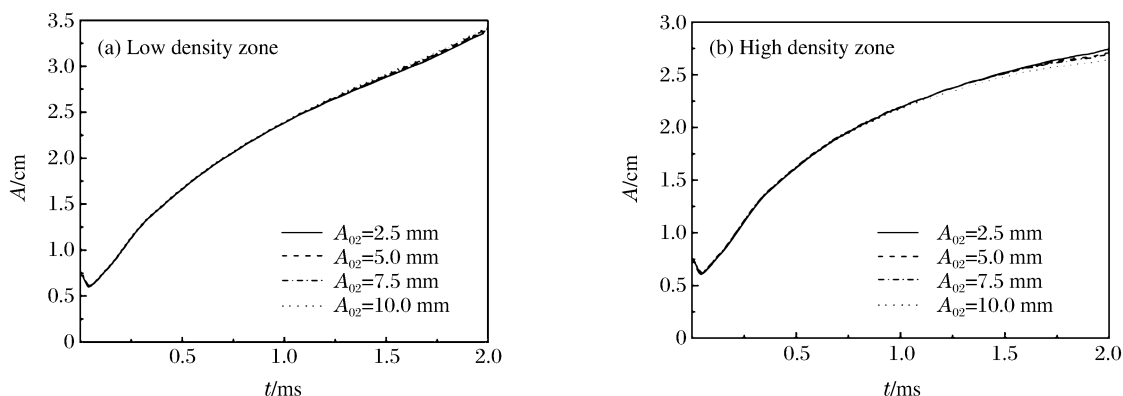
Table 2 Initial amplitudes of double-mode cosine interface

No.	A_{01}/mm	A_{02}/mm	No.	A_{01}/mm	A_{02}/mm	No.	A_{01}/mm	A_{02}/mm	No.	A_{01}/mm	A_{02}/mm
1	5.0	7.5	3	2.5	7.5	5	7.5	7.5	7	10.0	7.5
2	7.5	5.0	4	7.5	2.5	6	7.5	10.0			

图4 $t=1$ ms 时不同初始振幅组合下的流场密度云图Fig. 4 Density images of uniform and nonuniform flows under different groups of initial amplitudes at $t=1$ ms

2.1 振幅分析

为了讨论双模态之间的耦合效应,令 $A_{01}=7.5$ mm, 将其与不同初始振幅 A_{02} 进行组合, 计算得到高、低密度非均匀流场的振幅(A)增长情况, 如图5所示。可以看出, 在非均匀流场中, 界面发展后期振幅只有很小的差异, 因此可以认为在所考虑的时间范围内, 双模态耦合效应很弱, 基本可以忽略。

图5 在 A_{02} 不同情况下非均匀流场的振幅增长曲线Fig. 5 Perturbation amplitudes of nonuniform flows with 4 different amplitudes of A_{02}

基于以上结论, 对3种流场中、4种初始振幅情况下的振幅增长情况进行对比, 如图6所示。由图6可知: 均匀及非均匀流场高、低密度区中, 随着初始振幅 A_0 (当 A_{01} 和 A_{02} 相等时, 令 $A_{01}=A_{02}=A_0$) 由2.5 mm 增加到10.0 mm, 相应界面处的振幅增长也逐渐增加。相同初始振幅、不同密度区域条件下的振幅增长与流场的非均匀性息息相关; 非均匀流场低密度区振幅较大, 界面演化发展较快; 高密度区振幅较小, 界面演化发展较慢。以上结果与均匀流场中界面不稳定性的演化有很大区别, 在均匀流场、初始振幅一定的情况下, 随着密度的增大, Atwood 数增加, 界面扰动发展更快。

2.2 振幅增长率分析

振幅增长率可以表征激波加载后界面不稳定性的增长速度。图7为4组不同初始振幅(A_{01})条件下非均匀流场低密度区振幅增长率随时间的变化情况。由图7可知: 不同初始振幅条件下的振幅增长率变化情况基本一致; 初始时, 界面振幅增长率陡增, 后期振幅增长率缓慢下降。对于初始大振幅界面, 其相应的振幅增长更快, 振幅增长率也更大。图8给出了非均匀流场高、低密度区和均匀流场的振幅增长率。由图8(a)~图8(d)可知, 对于同一初始振幅而言, 初始非均匀流场低密度区的振幅增长率大于其高密度区的数值, 而均匀流场基本处于这两种密度流场之间, 与之前所得振幅增长规律相吻合。

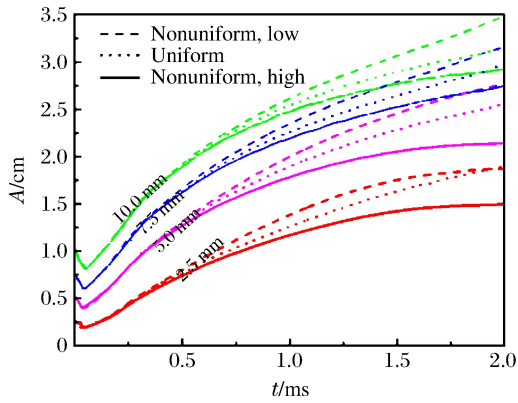


图 6 均匀流场与非均匀流场高、低密度区的振幅变化
Fig. 6 Perturbation amplitudes of uniform flow and high and low density zone of nonuniform flow with different A_0

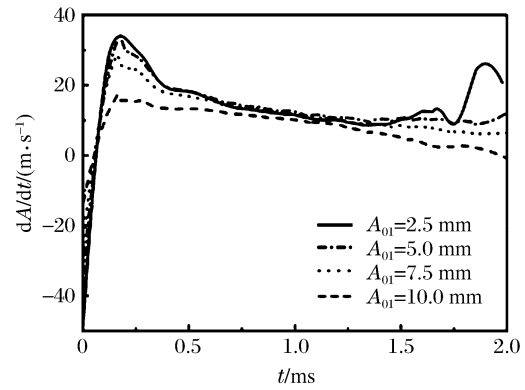


图 7 不同初始扰动振幅下非均匀流场界面振幅增长率
Fig. 7 Growth rate over time of nonuniform flows with 4 different amplitudes of A_0

从以上分析可知,振幅增长率的变化规律与振幅增长规律相吻合,初始非均匀流场低密度区的振幅增长率大于高密度区及均匀流场的振幅增长率,说明低密度区域的密度非均匀性可能引起了更加剧烈的界面振幅增长,与均匀流场呈现相反的规律。

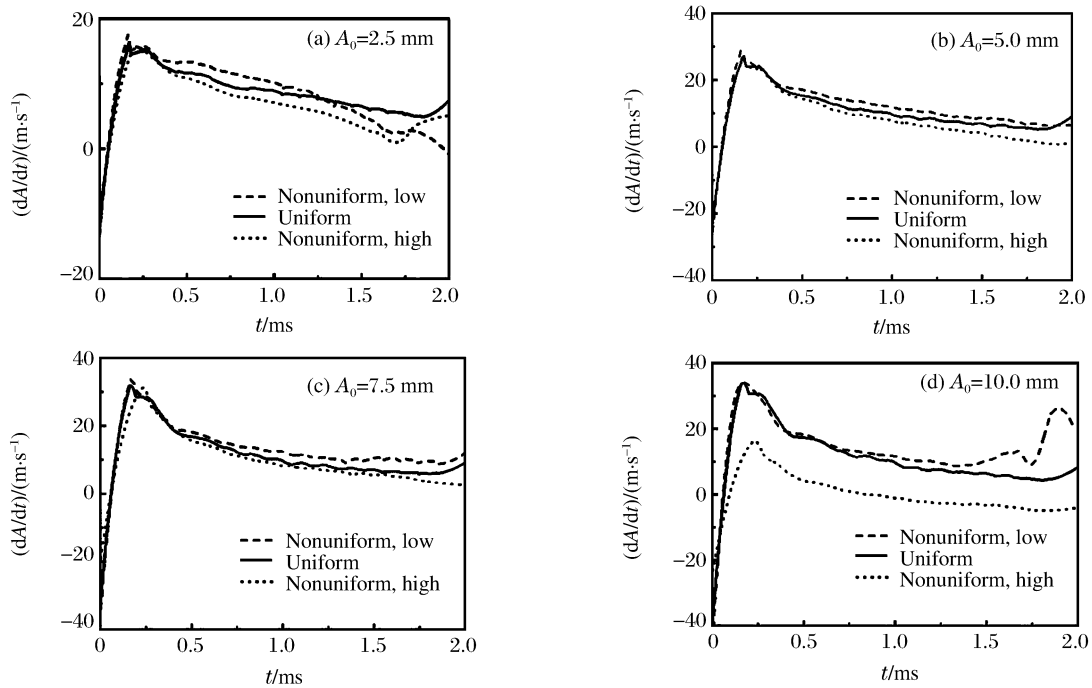


图 8 非均匀流场高、低密度区及均匀流场中界面振幅增长率

Fig. 8 Growth rate over time in high-density and low-density nonuniform flows and uniform flows

2.3 湍动能分析

湍动能 K 可以表征混合区域的湍流混合强度,为得到 x 方向的湍动能,首先对 y 方向进行平均,即

$$\bar{a}(x, t) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} a(x, j\Delta y, t) \quad (7)$$

然后,计算其质量平均值,即

$$a''(x, y, t) = a(x, y, t) - \tilde{a}(x, t), \quad \tilde{a}(x, t) = \overline{\rho a(x, t)} / \bar{\rho}(x, t) \quad (8)$$

由此可得湍动能 $K = \overline{u_i'' u_i''} / 2$, 其中 u_i'' 为速度 u 的湍流脉动量。

为了更清晰地对比非均匀流场和均匀流场的差异,增加了对低密度($\rho=4\text{ kg/m}^3$)均匀流场的数值模拟,图 9 和图 10 分别给出了均匀流场和非均匀流场高、低密度区湍动能随时间的变化情况。由图 9 和图 10 均可看出,湍动能最主要集中在湍流混合区域,混合区域随着激波传播而轴向移动。

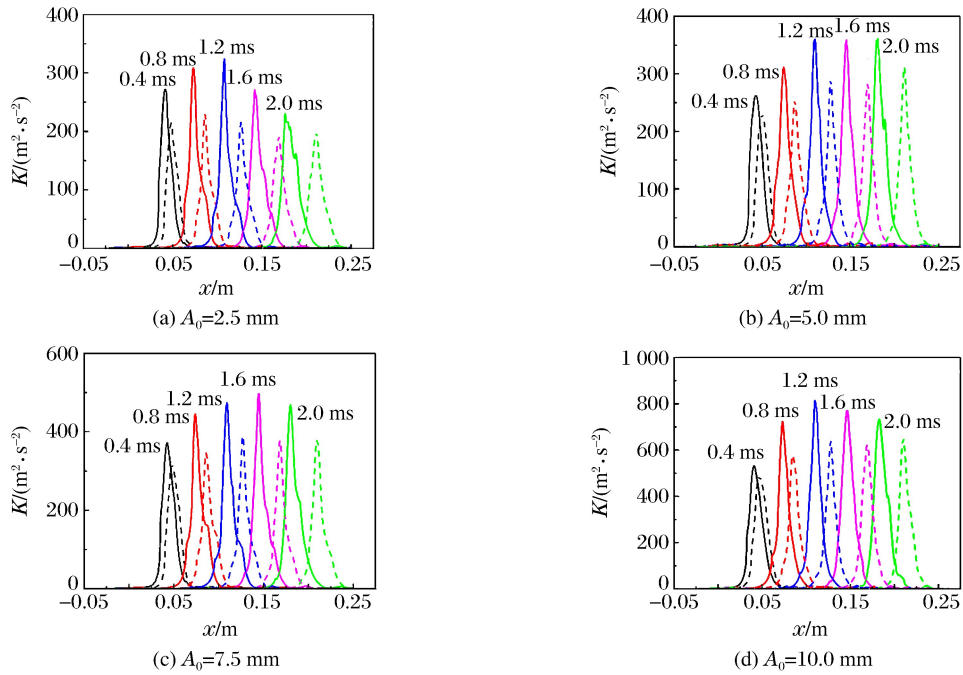


图 9 初始均匀流场中不同初始振幅情况下的湍动能分布(实线:高密度;虚线:低密度)

Fig. 9 Turbulent kinetic-energy profiles in high-density (solid line) and low-density (dashed line) uniform flows at various times under different initial amplitudes

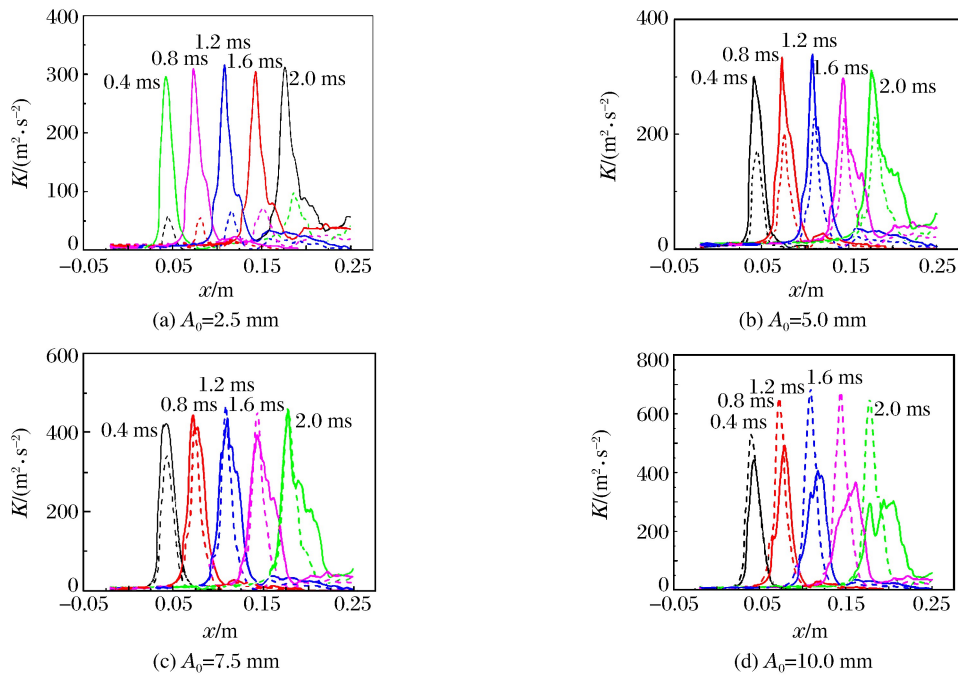


图 10 初始非均匀流场中不同初始振幅情况下的湍动能分布(实线:高密度;虚线:低密度)

Fig. 10 Turbulent kinetic-energy profiles in high-density (dashed line) and low-density (solid line) nonuniform flows at various times under different initial amplitudes

由图 9 可知,均匀流场中,高密度区的湍动能大于低密度区的湍动能,说明高密度区的界面湍流混合程度更高,但是对于初始振幅一定、不同密度的均匀流场情况下,其湍动能随密度变化的差值较为稳定。对于非均匀流场(见图 10),考虑到本研究模拟时初始振幅较大,因此其湍动能的分布区域相比于均匀流场更宽。当初始振幅在 2.5~7.5 mm 范围内时,低密度区域内的湍动能大于高密度区域内湍动能,并且随着初始振幅的减小,高、低密度区域内的湍动能差异愈加明显。这与之前的振幅、振幅增长率的变化趋势吻合,位于非均匀流场低密度区的界面不稳定性演化更厉害,导致更大的湍动能。但是对于初始振幅为 10 mm 时,湍动能变化情况(见图 10(d))不满足以上变化规律,可能是因为初始大振幅导致了湍动能统计区域较宽,湍动能分散情况较明显。

总体而言,在数值模拟时间内,均匀流场和非均匀流场高、低密度区的湍动能变化趋势具有相反的特征。均匀流场高密度区的湍动能大于低密度区的湍动能;在一定初始振幅范围内,非均匀流场的低密度区湍动能大于高密度区的湍动能,其混合范围较宽。湍动能的变化规律与之前振幅和振幅增长率的变化特征吻合较好,从能量角度解释了低密度区大振幅界面扰动增长最快、高密度区小振幅界面扰动增长最慢的现象。

2.4 斜压涡量分析

斜压涡量的沉积是界面不稳定性发展的重要机理,分析不同情况下斜压涡量的沉积可用于研究界面不稳定性演化。斜压涡量可以表示为

$$\frac{D\omega}{Dt} = (\omega \cdot \nabla)U - \omega(\nabla \cdot U) + \frac{1}{\rho^2}(\nabla\rho \times \nabla p) + \nu \nabla^2 \omega \quad (9)$$

忽略(9)式中的黏性项和小量,保留斜压涡产生项 $(\nabla\rho \times \nabla p)/\rho^2$,通过数值计算得出相应情况下的斜压涡量。选取 $t=0.5, 1.0, 1.5, 2.0$ ms 下,初始界面振幅组合为 $A_{01}=2.5$ mm, $A_{02}=7.5$ mm 中均匀和非均匀流场的斜压涡量进行对比,如图 11 所示。

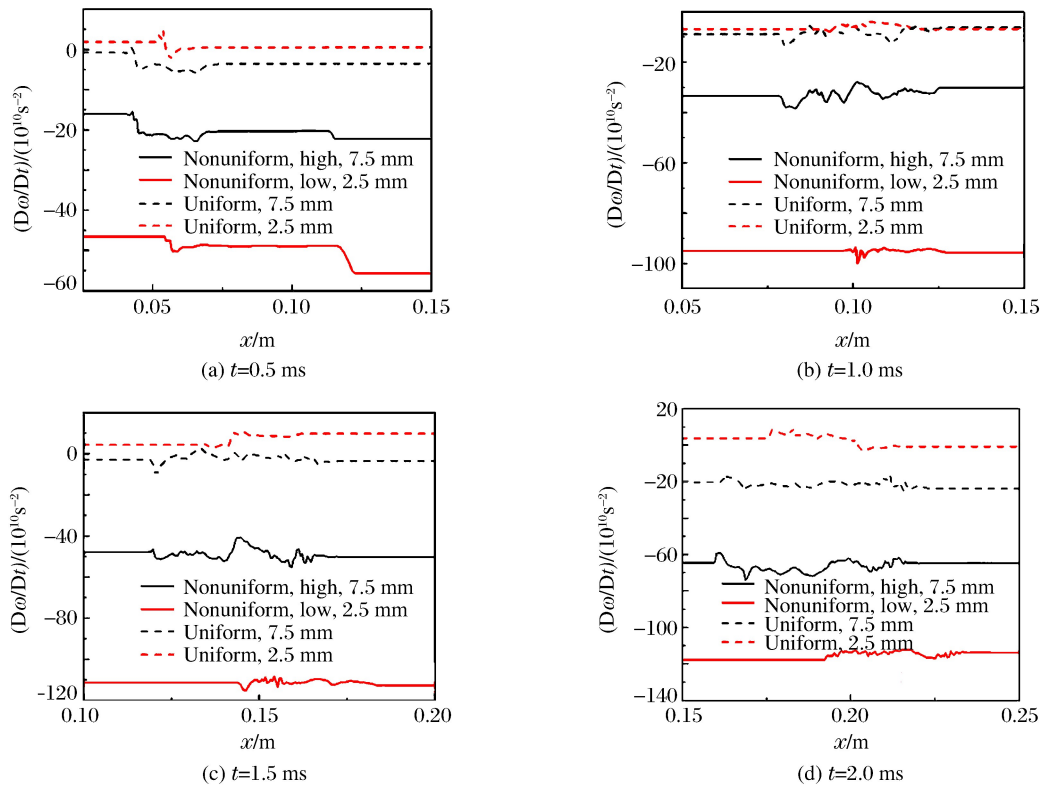


图 11 当 $A_{01}=2.5$ mm, $A_{02}=7.5$ mm 时初始均匀和非均匀流场中尖钉处的斜压涡量分布

Fig. 11 Baroclinic vorticity in uniform and nonuniform flows with $A_{01}=2.5$ mm, $A_{02}=7.5$ mm at various times

由图 11 可知,4 个时间点斜压涡量呈现相似的变化趋势,可总结为以下几点:(1) 高斯分布下的非均匀流场,极大地促使了负斜压涡量的产生;(2) 非均匀流场斜压涡量远大于均匀流场的斜压涡量;(3) 在非均匀流场中,低密度区小振幅的斜压涡量大于高密度区大振幅的斜压涡量;与均匀流场呈现的趋势相反,均匀流场中斜压涡量与振幅有关,初始界面振幅越大,其斜压涡量越高。

总之,非均匀流场中,密度梯度和压力梯度的改变在一定程度和范围内促进了斜压涡量的沉积和界面的演化发展,并且低密度区斜压涡沉积量大于高密度区。上述结果可用于解释之前振幅、振幅增长率及湍动能的变化规律。

3 结 论

为研究密度非均匀流场中冲击加载双模态界面失稳现象的规律,利用 MVFT-2D 程序数值模拟了密度分布为高斯分布的初始非均匀流场中, $Ma=1.27$ 激波作用下双模态余弦扰动的界面不稳定性演化。一方面,在密度一定条件下,初始振幅对均匀及非均匀流场中界面不稳定性演化的影响基本一致,即初始振幅越大,界面扰动增长越快。另一方面,流场非均匀性能够引起界面各方向的密度变化和速度改变,从而导致流场中不同区域振幅增长率和湍动能的差异。在密度梯度和压力梯度共同作用下,相比于非均匀流场高密度区,低密度区的斜压涡沉积量增加,使得界面振幅较大,振幅增长率更高,混合区域范围较宽,湍动能数值较大。

由此可知,在初始振幅和流场非均匀性协同作用下,非均匀流场低密度区大振幅扰动增长较快,高密度区小振幅扰动增长较慢。在此研究基础上,后期可利用此机理,研究更接近实际流场的 RM 界面不稳定性的演化,构造初始非均匀流场中的平行扰动增长双模态界面等。

参考文献:

- [1] YANG J, KUBOTA T, ZUKOSKI E E. Applications of shock-induced mixing to supersonic combustion [J]. AIAA Journal, 1993, 31(5): 854-862.
- [2] ARNETT D. The role of mixing in astrophysics [J]. Physics, 1999, 127(2): 213-217.
- [3] AMENDT P, COLVIN J D, TIPTON R E, et al. Indirect-drive noncryogenic double-shell ignition targets for the national ignition facility: design and analysis [J]. Physics of Plasmas, 2002, 9(5): 2221-2233.
- [4] LINDL J, LANDEN O, EDWARDS J, et al. Review of the National Ignition Campaign 2009-2012 [J]. Physics of Plasmas, 2014, 21(2): 020501.
- [5] SMALYUK V A, CASEY D T, CLARK D S, et al. First measurements of hydrodynamic instability growth in indirectly driven implosions at ignition-relevant conditions on the National Ignition Facility [J]. Physical Review Letters, 2014, 112(18): 185003.
- [6] SMALYUK V A, TIPTON R E, PINO J E, et al. Measurements of an ablator-gas atomic mix in indirectly driven implosions at the National Ignition Facility [J]. Physical Review Letters, 2014, 112(2): 025002.
- [7] KUMAR S, VOROBIEFF P, ORLICZ G, et al. Complex flow morphologies in shock-accelerated gaseous flows [J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 2007, 235(1): 21-28.
- [8] ORLICZ G C, BALAKUMAR B J, TOMKINS C D, et al. A Mach number study of the Richtmyer-Meshkov instability in a varicose, heavy-gas curtain [J]. Physics of Fluids, 2009, 21(6): 064102.
- [9] ANDREWS M J. Workshop: research needs for material mixing at extremes [R]. Los Alamos National Laboratory, 2011.
- [10] 刘金宏, 谭多望, 柏劲松, 等. 激波管实验研究非均匀流场 RM 不稳定性 [J]. 实验力学, 2012, 27(2): 160-164.
LIU J H, TAN D W, BAI J S, et al. Experimental study of Richtmyer-Meshkov instability in nonuniform flow by shock tube [J]. Journal of Experimental Mechanics, 2012, 27(2): 160-164.
- [11] BAI J S, LIU J H, WANG T, et al. Investigation of the Richtmyer-Meshkov instability with double perturbation interface in nonuniform flows [J]. Physical Review E, 2010, 81(5): 056302.

- [12] WANG T, BAI J S, LI P, et al. The numerical study of shock-induced hydrodynamic instability and mixing [J]. Chinese Physics B, 2009, 18(3): 1127-1135.
- [13] XIAO J X, BAI J S, WANG T. Numerical study of initial perturbation effects on Richtmyer-Meshkov instability in nonuniform flows [J]. Physical Review E, 2016, 94(1): 013112.

Numerical Study of Shock Wave Impacting on the Double-Mode Interface in Nonuniform Flows

XIAO Jiaxin, BAI Jingsong, WANG Tao

(*Institute of Fluids Physics, China Academy of Engineering Physics, Mianyang 621999, China*)

Abstract: The double-mode Richtmyer-Meshkov (RM) instability, when the incident shock ($Ma = 1.27$) impacting on several groups of initial double-mode cosine interface formed by different amplitudes in initially nonuniform flows whose density is Gaussian distribution, was numerically investigated using the large-eddy simulation code MVFT (multi-viscous-flow and turbulence). The numerical results show that the coupling effects between different amplitudes in the nonuniform flows are weak and the evolution of the interface with a large initial amplitude in the low density nonuniform area grows fastest, while that with a small initial amplitude in the high density nonuniform area grows slowly. Further analyses reveal that within a certain initial amplitude range, the amplitude growth rate and energy in the low density zone of nonuniform flows is larger than those in the high density zone, thus the influence of the initial amplitude on the low density zone is more obvious, which eventually leads to a faster evolution process of the RM instability. Moreover, the changing phenomena of uniform flows are opposite to nonuniform flows. Thus, it can be concluded that the evolution mechanisms of the RM instability between the nonuniform and uniform flows are distinctive.

Keywords: nonuniform flows; Richtmyer-Meshkov instability; initial perturbation; numerical simulation

Numerical Investigations of Perturbation Growth in Aluminum Flyer Driven by Explosion^{*}

WANG Tao^{1,2}, BAI Jingsong¹, CAO Renyi¹, WANG Bing¹,
ZHONG Min¹, LI Ping¹, TAO Gang²

(1. *Institute of Fluid Physics, CAEP, Mianyang 621999, China;*
2. *School of Energy and Power Engineering, Nanjing University
of Science and Technology, Nanjing 210094, China*)

Abstract: In this paper we developed an experimental technique and numerical simulation method that we then adopted to investigate the Rayleigh-Taylor instability in metallic materials driven by explosion. We studied experimentally and numerically the growth of the Rayleigh-Taylor instability in an explosion-driven aluminum flyer and showed that the perturbation amplitude growth follows an exponential law over time. The numerical results agree with the experiment qualitatively, but not quantitatively. This is because the aluminum strengthens under high pressure and at high strain rate, and the Steinberg-Guinan constitutive model used in the simulations underestimates the strength of the aluminum as being not great enough to suppress the perturbation growth. By investigating numerically the effects of the initial shear modulus and the initial yield strength on the development of the Rayleigh-Taylor instability of the metallic material, we also found that the initial shear modulus in a specified range does not affect the dynamic yield strength and the increase in the initial yield strength can improve the dynamic yield strength significantly to stabilize the perturbation growth. In other words, the material strength dominates the interface perturbation growth.

Keywords: explosion-driven; Rayleigh-Taylor instability; perturbation growth; material strength; stabilize

CLC number: O33; O344.3

Document code: A

The corrugated interface between different fluids grow when accelerated from a low-density fluid to a high-density fluid, which is called Rayleigh-Taylor (RT) instability^[1-2]. This phenomenon may also occur in metals, but usually under a high pressure and at a high strain-rate, but differs most distinctly from the RT instability in fluids in its strength effect of the metal, which can stabilize the perturbation growth^[3-4] and make the metallic RT instability more complex and difficult. Here, it is also affected by the loading state and the properties of the metallic materials. The metallic RT instability at high pressure and strain-rate can be observed in inertial confinement fusion^[5], supernova explosion^[6], asteroid collision^[7], the motion of earth's inner core and plate tectonics^[8], and so on. Therefore, the metallic RT instability is currently a major concern for researchers and receives a great deal of academic attention.

In theoretical studies about the metallic interface instability, dispersion relations of the perturbation growth are derived mainly based on the energy^[9-11] or force equilibrium^[12-13]. However, the previous

^{*} **Received date:** 2017-08-01; **Revised date:** 2017-08-30

Foundation Item: Science Challenge Project (TZ2016001); National Natural Science Foundation of China (11372294, 11532012, 11672277)

Biography: WANG Tao (1979—), male, master, major in computational mechanics. E-mail: wtao_mg@163.com

linear analysis cannot predict the perturbation growth accurately just by applying the perfect plastic constitutive relation and constant pressure loading state. Based on the energy balance, a perturbation growth equation using Steinberg-Guinan (SG) and the Johnson-Cook constitutive models, as well as a variable pressure loading process consistent with experiments, has been derived that precisely predicts the growth of metallic RT instabilities driven by detonation and laser plasma. However, the linear analysis still has its limitations and does not take full account of the loading procedure.

Experimental studies of the metallic RT instability started in the 1970s. The pioneering experimental research^[14] was the perturbation growth of a flat aluminum plate accelerated by the expansion of detonation products, which was observed using a high-energy X-ray facility. What was achieved then inspired researchers, and the similar equipment was utilized in later research^[15-17]. In the USA and Russia particularly, numerous numerical simulations and experimental investigations for the metallic RT instability have been carried out, but have mainly concentrated on the perturbation growth and such influencing factors as the initial amplitude, the wavelength and material properties. Igonin and Ignatova *et al.*^[18-19] experimentally and numerically studied the dynamic behaviors of copper (Cu) and tantalum (Ta) subjected to both shock and shockless loading by employing a perturbation growth method. They observed that the formation of the bi-periodic twin structures resulted in an initial loss of the shear strength of Cu, but failed to observe localization in Ta. Olson *et al.*^[16] experimentally studied the effects of the grain size and material processing on the RT perturbation growth of Cu. They found that both the single-crystal orientation and the strain hardening due to the material processing can affect the perturbation growth, but the polycrystalline grain size cannot. For the plane detonation, the loading pressure is generally about 30 GPa. To enhance the loading pressure, Henry de Frahan *et al.*^[17] studied the beryllium RT instability using an iron flyer plate to impact the second high explosive (HE) to raise the pressure to 50 GPa in their experiments, and combined numerical simulations to calibrate the feasibility of different constitutive models. When the sample is driven by electromagnetism^[20-21] or laser^[4,22], the loading pressure can be further increased. Very extreme conditions of pressures over 1000 GPa and strain rates of 10^8 s^{-1} have been achieved at the National Ignition Facility, USA, where the RT instability experiment in vanadium was carried out, and constitutive models in solid phase were tested by comparing simulations with experiments measuring the perturbation growth^[23] under the extreme conditions mentioned.

In the metallic interface instability, the perturbation growth is related to and arrested by the material strength. Moreover, some investigations have demonstrated that the material strength increases under these extreme conditions. Results from the metallic RT experiments and computations by Barnes *et al.*^[14] show that the yield strength of 1100-0 aluminum is over 10 times larger than the standard parameter, and the yield strength of 304 stainless steel also increases by more than three times. Using the SG constitutive strength model, calculations of plasma-driven quasi-isentropic RT experiments of Al-6061-T6 using the Omega laser at a peak drive pressure of 20 GPa indicate that its yield strength is a factor of about 3.6 times over the ambient value^[22]. In Park *et al.*'s^[4] plasma-driven quasi-isentropic polycrystalline vanadium RT experiments using the Omega laser with a peak drive pressure of 100 GPa, the measured RT growth was substantially lower than predictions using the existing constitutive models (SG and Preston-Tonks-Wallace) that work well at low pressures and long timescales. Using the SG model, the simulations agree with the RT experimental data when the initial strength is raised by a factor of 2.3. Therefore, the SG and Preston-Tonks-Wallace models underestimate the strength of vanadium under very high pressures and strain rates. Belof *et al.*^[24] first meas-

ured the dynamic strength of iron undergoing solid-solid phase transition by using RT instability. In conjunction with detailed hydrodynamic simulations, the analysis results revealed significant strength enhancement of the dynamically generated ϵ -Fe and reverted α' -Fe, comparable in magnitude to the strength of austenitic stainless steels. Therefore, the metallic RT instability was suggested and used as a tool for evaluating the material strength of solids at high pressures and high strain rates^[3,25], and then for modifying or developing new constitutive models for these conditions^[26-27].

In view of the dominant role of the material strength in metallic interface instabilities, and the limitations of existing constitutive models at high pressures and high strain rates, we aimed to investigate the material strength and its effects on metallic interface instabilities. In this paper, we also conducted an RT instability experiment in explosion-driven aluminum, and measured the perturbation growth using X-ray radiography. In combination with elastic-plastic hydrodynamic simulations, we investigated the dynamic behavior of metallic RT instabilities and the role of the material strength in these.

1 Experimental Setup

Following that of Barnes *et al.*,^[14] our experiment used the setup as shown in Fig. 1(a), where we have a sketch of the experimental setup consisting of a detonator, a booster, plane wave lens, JO-9159 HE (100 mm in diameter and 50 mm in thickness), an aluminum sample, and a vacuum. Fig. 1(b) shows the experimental sample of aluminum with a diameter of 65 mm and a thickness of 1.5 mm in the central region. An initial sinusoidal perturbation was machined on the side of the aluminum sample facing the HE. The perturbation amplitude and wavelength were 0.25 mm and 6 mm, respectively. The HE products crossed the void of 3.5 mm between the sample and HE and accumulated on the perturbation interface of the sample, providing a smooth rise to peak pressure and a quasi-isentropic drive. Moreover, the void between the sample and HE can ensure that the temperature of the sample at high pressures remain below the melting point^[22].

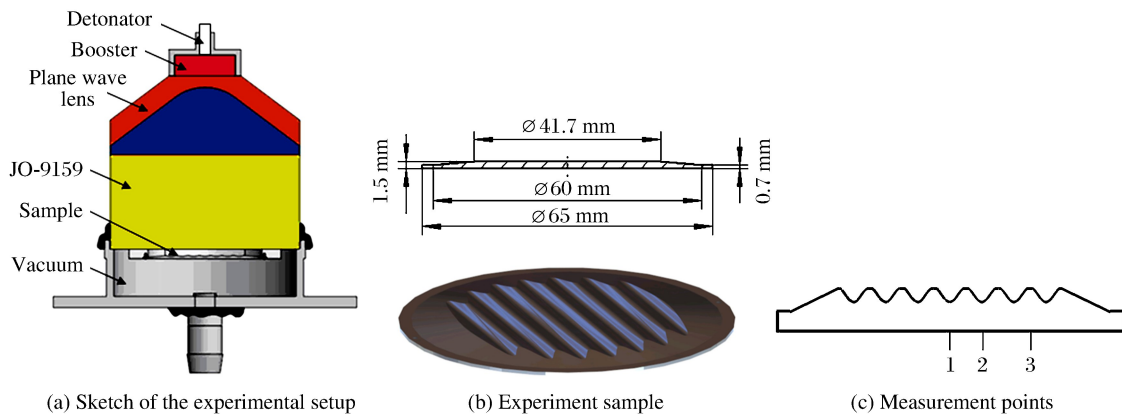


Fig. 1 Sketch of the experimental setup and sample

In the experiment, X-ray radiography was used to record the evolution of the perturbation interface from the JO-9159 explosive detonation at zero time. A Doppler pin system was used to measure the history of the free surface velocity, which can be integrated to obtain the corresponding free surface displacement. Fig. 1(c) shows the distribution of measurement points of the free surface velocity, where both points 1 and 2 correspond to the wave trough positions with one wavelength interval, and point 3 corresponds to the wave crest position with 1.5 wavelength intervals from point 2.

2 Numerical Methods

Based on our indoor hydrodynamic code of compressible multi-viscous flow and turbulence (MVFT)^[28-30], we developed a detonation and shock dynamics code with high fidelity by considering the explosive detonation and the elastic-plastic behavior of the material. This code can be used to study the physical problem of multi-materials, large deformation, and strong shock. The governing equations in conserved form are as follows

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \oint_S \rho u_i n_i dS \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho u_j dV = - \oint_S P n_j dS - \oint_S \rho u_i u_j n_i dS + \oint_S s_{ij} n_i dS \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho E dV = - \oint_S u_i P n_i dS - \oint_S \rho u_i E n_i dS + \oint_S s_{ij} u_j n_i dS \end{cases} \quad (1)$$

where i and j represent the x, y , and z directions; V is the control volume, S the surface of control volume, n the unit vector of the external normal direction, ρ, u_k (where $k=i, j$), p , and E are the density, velocity, pressure, and total energy of per unit mass; and s_{ij} the deviation stress tensor.

The physical problem as described by Eq. (1) was decomposed into three one-dimensional problems. For each of them, the physical quantities in a cell were interpolated and reconstructed using a piecewise parabolic method (PPM). The one-dimensional problem was then resolved using a two-step Euler algorithm: First the physical quantities were solved by the Lagrange matching, and then remapped back to the stationary Euler meshes. The effect of material strength, explosive detonation, and artificial viscosity were implemented in the Lagrange step. The multi-material interface was captured by applying a volume-of-fluid (VOF) method.

2.1 Equation of State

In our numerical simulations, the equation of state (EOS) for the explosive and aluminum are the Jones-Wilkins-Lee (JWL) and Mie-Grüneisen equations of state, respectively. The Jones-Wilkins-Lee equation of state is

$$p(\rho, T) = A \left(1 - \frac{\omega}{R_1 v} \right) e^{-R_1 v} + B \left(1 - \frac{\omega}{R_2 v} \right) e^{-R_2 v} + \frac{\omega \bar{E}}{v} \quad (2)$$

where $v = \rho_0 / \rho$ is specific volume; A, B, R_1, R_2 , and ω are constants; and $\bar{E}$ is the internal energy per unit volume. Table 1 lists the JWL EOS parameters of the JO-9159 explosive. The Mie-Grüneisen equation of state is

$$p = \frac{\rho_0 c^2 \mu [1 + (1 - \gamma_0/2) \mu - a \mu^2/2]}{\left[1 - (S_1 - 1) \mu - \frac{S_2 \mu^2}{\mu + 1} - \frac{S_3 \mu^3}{(\mu + 1)^2} \right]^2} + (\gamma_0 + a \mu) \bar{E} \quad (3)$$

where $\mu = \rho / \rho_0 - 1$ is the relative compression, ρ_0 the initial density, c the sound velocity at zero pressure, γ_0 the Grüneisen coefficient, and a, S_1, S_2 , and S_3 are constants (in Table 2).

Table 1 Equation of state parameters of JO-9159 explosive

$\rho / (\text{g} \cdot \text{cm}^{-3})$	$p_{\text{CJ}} / \text{GPa}$	$D_{\text{CJ}} / (\text{km} \cdot \text{s}^{-1})$	A / GPa	B / GPa	R_1	R_2	ω
1.86	36	8.862	934.8	12.7	4.6	1.1	0.37

Table 2 Mie-Grüneisen equation of state parameters of aluminum

$\rho / (\text{g} \cdot \text{cm}^{-3})$	$c / (\text{km} \cdot \text{s}^{-1})$	γ_0	a	S_1	S_2	S_3
2.703	5.22	1.97	0.47	1.37	0	0

2.2 Constitutive Model

In our simulations, the elastic-plastic behavior of aluminum at high pressures and high strain rates was described using the SG constitutive model. The SG model introduces pressure, temperature, and strain-rate terms into the elastic-plastic constitutive equation, while the coupling effect of pressure and strain rate on flow stress was characterized by the separating variables. Additionally, as the flow stress in the SG model relies on pressure, there is a coupling relationship between the material constitutive equation and the equation of state, which indicates the feature of pressure hardening of metal under high pressure. The dynamic yield strength Y_{SG} and the shear modulus G determined by the SG model are expressed as

$$Y_{SG} = Y_0 [1 + \beta(\epsilon_p + \epsilon_i)]^n [1 + Ap\eta^{-1/3} - B(T - 300)] \quad (4)$$

$$G = G_0 [1 + Ap\eta^{-1/3} - B(T - 300)] \quad (5)$$

where Y_0 and G_0 are the initial yield strength and the shear modulus, respectively; β and n are the material strain hardening coefficient and the hardening index, respectively; A is the pressure hardening coefficient; $\eta = \rho/\rho_0$ is the material compression ratio; and B is the temperature softening coefficient (in Table 3).

Table 3 Steinberg-Guinan constitutive model parameters of aluminum

Y_0/GPa	$Y_{\max}/\text{GPa}$	G_0/GPa	β	n	A/GPa^{-1}	$B/(10^{-3}\text{K}^{-1})$
0.29	0.68	27.6	125	0.1	0.0652	0.616

3 Results and Discussions

In our experiment, X-ray radiography recorded an image of the perturbed interface at $7.78\ \mu\text{s}$, as shown in Fig. 2(a), from which we obtained the amplitude of $0.77\ \text{mm}$ simultaneously by image processing. In the simulations, the mesh size was $15.6\ \mu\text{m}$, and Tables 2 and 3 list the parameters of the Mie-Grüneisen EOS and the SG constitutive model of aluminum, respectively.

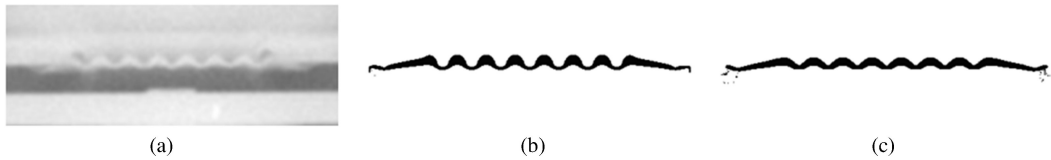


Fig. 2 Comparisons of the perturbed interface between experiment and numerical simulations

((a) Experimental image, (b) Simulated image at normal strengths Y_0 and G_0 ,

(c) Simulated image at 10 times the normal strengths Y_0 and G_0)

Fig. 3 shows the pressure histories of the crest (solid line) and the trough (dashed line) on the loading surface, which increase continuously and smoothly in a short time and form an approximate quasi-isentropic drive. Afterwards, the expansion of the detonation products decelerates gradually, and the loading pressure on the interface rises slowly. However, the pressure at the trough ascends faster than that at the crest, and the peak pressure at the trough is also relatively larger, because the detonation products converges at the trough and diverges at the crest. The average peak

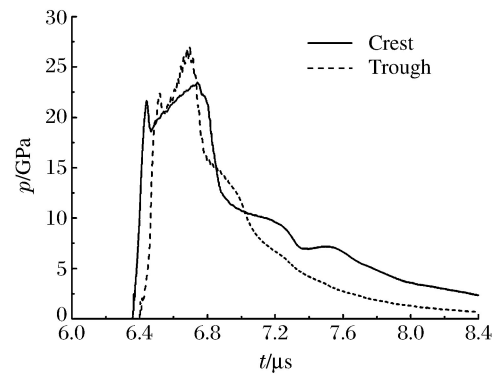


Fig. 3 Pressure histories of crest and trough at the loading surface

pressure is about 25 GPa, and the strain rate reaches 10^6 s^{-1} . The loading pressure then reduces gradually, which is attributed to the decrease of the expansion pressure of the detonation products and the unloading effect of the rarefaction wave reflecting from the free surface.

Fig. 4 shows several contours of local pressure (a), density (b), and temperature (c) at 6 different times after the arrival of the detonation products at the loading surface, from left to right and top to bottom, at 6.36, 6.5, 6.7, 6.9, 7.1 and 7.3 μs . They exhibit an evolution process of the perturbed interface and the interaction of the wave and the interface. The blue part of the temperature contour is the aluminum sample, and the sample temperature remains below 500 K and far below the melting point of 1 200 K, which indicates that the sample is in the elastic-plastic state all the time.

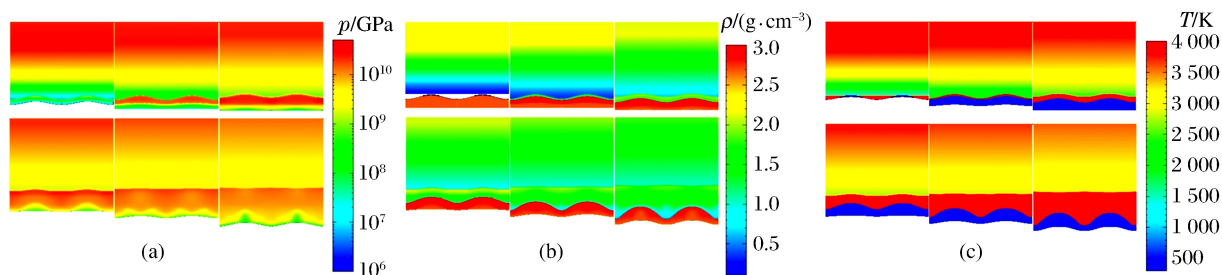


Fig. 4 Contours of local pressure (a), density (b), and temperature (c) at 6.36, 6.5, 6.7, 6.9, 7.1, and 7.3 μs from left to right and top to bottom after the arrival of detonation products at the loading surface

Fig. 2(b) shows an image of the sample at 7.78 μs when the initial yield strength Y_0 and the shear modulus G_0 are normal values. Fig. 5 shows a comparison of the perturbation amplitudes between the experiment and numerical simulations, where the square symbol corresponds to the experimental result, and the solid black line corresponds to the numerical results when Y_0 and G_0 are normal. The simulated amplitude is much larger than that in the experiment when using normal values of Y_0 and G_0 . This is because the aluminum strengthens under such conditions, and the SG constitutive model underestimates its strength, which can suppress the perturbation growth.

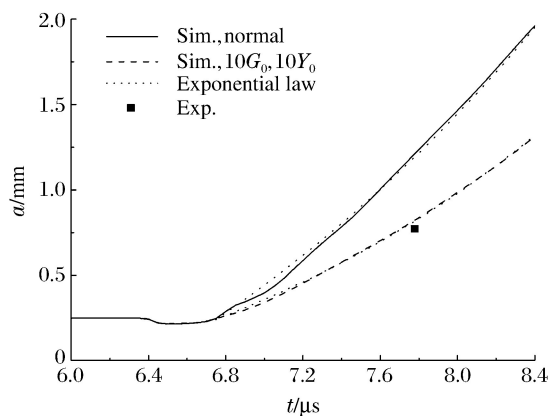


Fig. 5 Growth histories of the perturbation amplitude

Fig. 6 shows the time histories of the free surface velocity (a) and displacement (b) at 3 measurement points (dot-dot-dashed lines: experiment; solid, dashed, and dotted lines: simulations), which agree well with each other. Therefore, the calculations of detonation of the explosive and the thermodynamic state of the sample are exact.

Fig. 7 shows the calculated time histories of the strain at the crest (solid line) and trough (dashed line) of the loading surface. The deformation at the trough is much larger than that at the crest because the trough of the sample is in a stronger tensile stress state, which is the main mechanism for the deformation of the perturbation interface. Fig. 8 shows the time histories of the dynamic yield strength at the crest (solid line) and trough (dashed line) of the loading surface, calculated using the SG constitutive model, similar to the profile of the loading pressure, which demonstrate that the material strength increased as did the loading pressure under a certain condition.

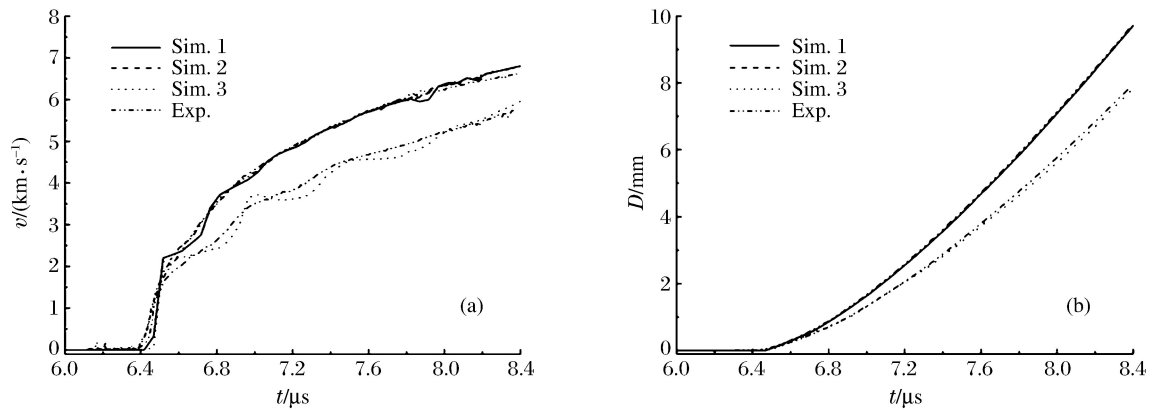


Fig. 6 Time histories of the free surface velocity (a) and displacement (b)

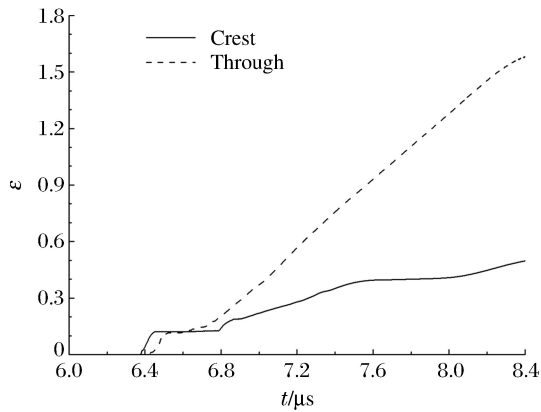


Fig. 7 Time histories of strain at the crest and trough of the loading surface

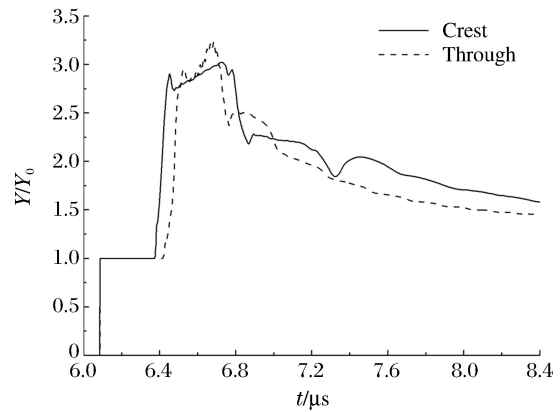


Fig. 8 Time histories of yield strength at the crest and trough of the loading surface

Moreover, when the loading pressure reaches a peak, the dynamic yield strength was up to 3 times that of the initial value. In fact, the normal SG model is generally calibrated by conventional Hopkinson and Taylor impacts experiment with a lower strain rate. Under the current loading conditions (loading pressure of 25 GPa and strain rate of $10^6 s^{-1}$), the strength is not great enough to suppress the perturbation growth. However, when the initial yield strength Y_0 and the shear modulus G_0 increase to 10 times that of the normal values, good agreement between the experiment and simulation is achieved, as shown in Fig. 2(c) for the perturbation interface and in Fig. 5 for the perturbation amplitude with the dashed line. Therefore, the material strength intensively stabilizes the perturbation growth. The dotted lines in Fig. 5 are fitted lines from the simulated results, indicating that the perturbation amplitude grows exponentially over time.

We studied the effect of the initial yield strength and the initial shear modulus of the material on the evolution and growth of the perturbed interface. Figs. 9(a), 10(a), and 11(a) show the calculated growth histories of perturbation amplitude, strain histories, and dynamic yield strength histories at the trough of the loading surface, respectively, when the initial yield strength is fixed at the normal value and as the initial shear modulus increases gradually. The growth of the perturbation amplitude exhibits no change even when the initial shear modulus increases to 10 times that of the normal value, which means that the initial shear modulus has no influence on the material deformation and does not affect

the dynamic yield strength.

Figs. 9(b), 10(b), and 11(b) show the numerical results when the initial shear modulus is fixed and the initial yield strength gradually increases to 10 times that of the normal value. These indicate that, with the increase of the initial yield strength, the dynamic yield strength also increases, the material deformation is retarded, and the perturbation growth is suppressed markedly. Therefore, the initial shear modulus of the material exerts no effect on the growth of the metallic RT instability within a certain range, while the initial yield strength has an obvious effect on it.

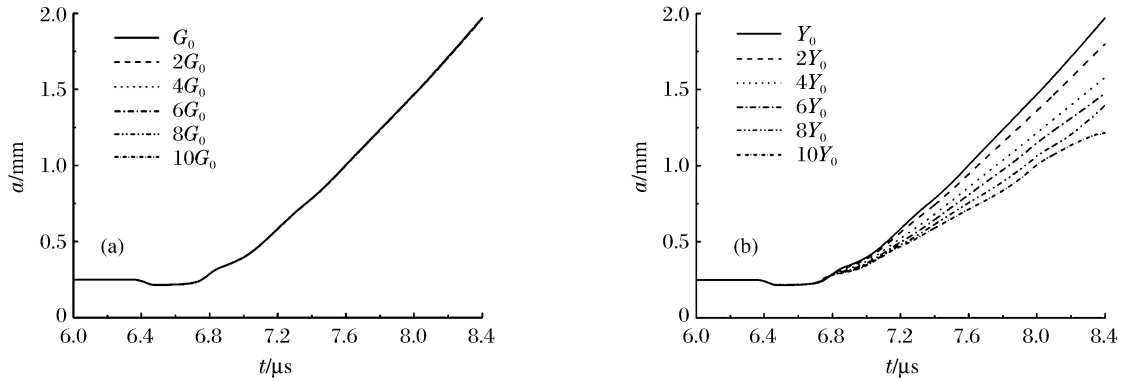


Fig. 9 Growth histories of the perturbation amplitude for different values of initial shear modulus (a) and yield strength (b)

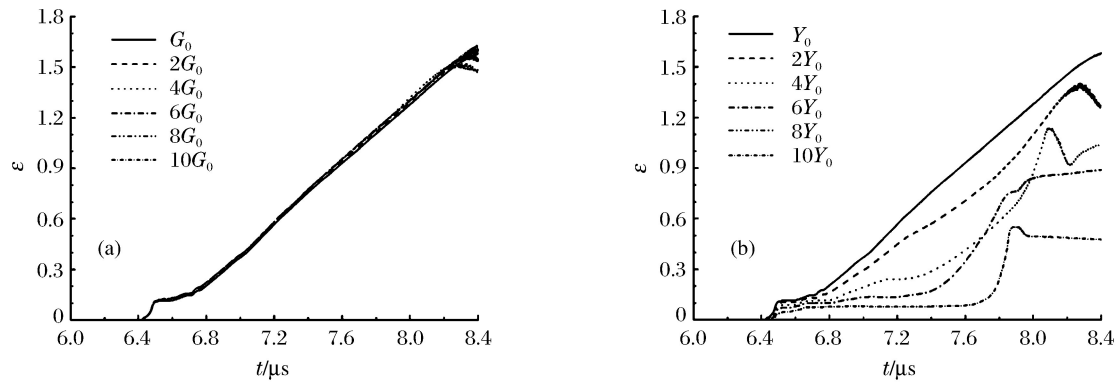


Fig. 10 Time histories of strain at the trough of the loading surface for different values of initial shear modulus (a) and yield strength (b)

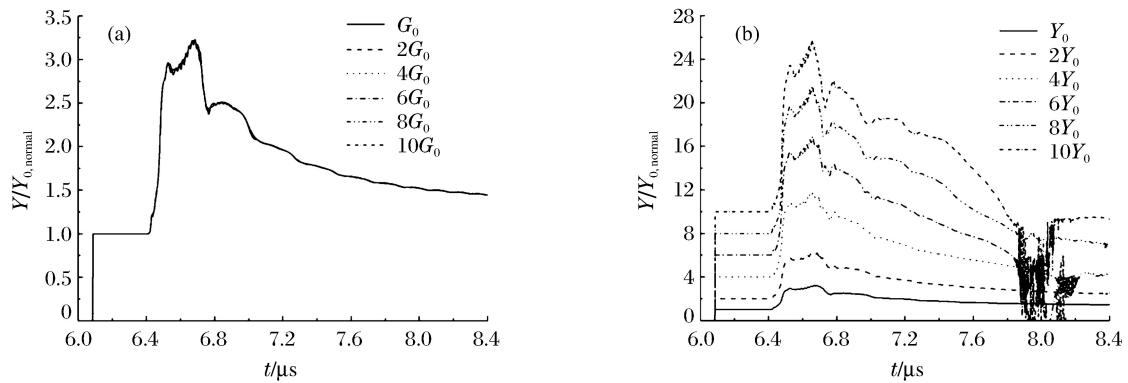


Fig. 11 Time histories of yield strength at the trough of the loading surface for different values of initial shear modulus (a) and yield strength (b)

4 Conclusions

We have established an experimental setup and developed a numerical simulation method to investigate the RT instability in metallic materials driven by explosion. We also studied the RT instability in aluminum, and drew the following conclusions:

(1) The perturbation amplitude grows following an exponential law over time.

(2) When using the normal physical property parameters of aluminum, simulated evolution of the perturbed interface agrees with experiment only qualitatively, and there is a big quantitative difference between them because the aluminum strengthens under high pressures and at high strain rates, and the SG constitutive model underestimates its strength as being not great enough to suppress the perturbation growth.

(3) When the initial yield strength and the initial shear modulus increase to 10 times their normal values, the numerical and experimental results are in good agreement both qualitatively and quantitatively. The underlying physical mechanism is the stabilization effect of material strength on the perturbation growth. Moreover, the initial shear modulus has no influence on the perturbation growth within a certain range whereas the initial yield strength does influence it strongly. Therefore, the material strength dominates the evolution of the metallic RT instability.

References:

- [1] RAYLEIGH L. Investigation of the character of the equilibrium of an incompressible heavy fluid of variable density [J]. Proceedings London Mathematical Society, 1883, 14(1): 170-177.
- [2] TAYLOR G I. The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their plane [J]. Proceedings of the Royal Society of London, Series A, 1950, 201(1065): 192-196.
- [3] DIMONTE G, TERRONES G, CHERNE F J, et al. Use of the Richtmyer-Meshkov instability to infer yield stress at high-energy densities [J]. Physical Review Letters, 2011, 107(26): 264502.
- [4] PARK H S, REMINGTON B A, BECKER R C, et al. Strong stabilization of the Rayleigh-Taylor instability by material strength at megabar pressures [J]. Physics of Plasmas, 2010, 17(5): 056314.
- [5] MCCRORY R L, MONTIERTH L, MORSE R L, et al. Nonlinear evolution of ablation-driven Rayleigh-Taylor instability [J]. Physical Review Letters, 1981, 46(5): 336-339.
- [6] KIFONIDIS K, PLEWA T, SCHECK L, et al. Non-spherical core collapse supernovae II. The late-time evolution of globally anisotropic neutrino-driven explosions and their implications for SN 1987A [J]. Astron Astrophys, 2006, 453: 661-678.
- [7] MAC LOW M M, ZAHNLE K. Explosion of comet shoemaker-levy 9 on entry into the jovian atmosphere [J]. The Astrophysical Journal, 1994, 434: L33-L36.
- [8] MOLNAR P, HOUSEMAN G A, CONRAD C P. Rayleigh-Taylor instability and convective thinning of mechanically thickened lithosphere: effects of non-linear viscosity decreasing exponentially with depth and of horizontal shortening of the layer [J]. Geophysical Journal International, 1998, 133(3): 568-584.
- [9] MILES J W. Taylor instability of a flat plate, General atomic division of general dynamics; GAMD-7335 [R]. 1966.
- [10] WHITE G N. A one-degree-of-freedom model for the Taylor instability of an ideally plastic metal plate; LA-5225-MS [R]. Los Alamos, NM; Los Alamos National Laboratory, 1973.
- [11] ROBINSON A C, SWEGLE J W. Acceleration instability in elastic-plastic solids II. Analytical techniques [J]. Journal of Applied Physics, 1989, 66(7): 2859-2872.
- [12] PIRIZ A R, LÓPEZ CELA J J, CORTÁZAR O D, et al. Rayleigh-Taylor instability in elastic solids [J]. Physical Review E, 2005, 72(5): 056313.

- [13] PIRIZ A R, LÓPEZ CELA J J, TAHIR N A. Rayleigh-Taylor instability in elastic-plastic solids [J]. *Journal of Applied Physics*, 2009, 105(11): 116101.
- [14] BARNES J F, BLEWETT P J, MCQUEEN R G, et al. Taylor instability in solids [J]. *Journal of Applied Physics*, 1974, 45(2): 727-732.
- [15] GRAHAM L M J, CAVALLO R M, LORENZ K T, et al. Aluminum Rayleigh Taylor strength measurements and calculations [C]//10th International Workshop on Physics of Compressible Turbulent Mixing. Paris, France, 2006.
- [16] OLSON R T, CERRETA E K, MORRIS C, et al. The effect of microstructure on Rayleigh-Taylor instability growth in solids [J]. *Journal of Physics: Conference Series*, 2014, 500: 112048.
- [17] HENRY DE FRAHAN M T, BELOF J L, CAVALLO R M, et al. Experimental and numerical investigations of beryllium strength models using the Rayleigh-Taylor instability [J]. *Journal of Applied Physics*, 2015, 117(22): 225901.
- [18] APRELKOV O N, IGNATOVA O N, IGONIN V V, et al. Twinning and dynamic strength of copper during high-rate strain [C]//Shock Compression of Condensed Matter—AIP Conference Proceedings, 2007, 955(1): 619-622.
- [19] IGONIN V V, IGNATOVA O N, LEBEDEV A I, et al. Influence of dynamic properties on perturbation growth in tantalum [C]//Shock Compression of Condensed Matter—AIP Conference Proceedings, 2010, 1195(1): 1085-1088.
- [20] SLUTZ S A, HERRMANN M C, VESEY R A, et al. Pulsed-power-driven cylindrical liner implosions of laser pre-heated fuel magnetized with an axial field [J]. *Physics Plasmas*, 2010, 17(5): 056303.
- [21] MCBRIDE R D, SLUTZ S A, JENNINGS C A, et al. Penetrating radiography of imploding and stagnating beryllium liners on the Z accelerator [J]. *Physical Review Letters*, 2012, 109(13): 135004.
- [22] LORENZ K T, EDWARDS M J, GLENDINNING S G, et al. Accessing ultrahigh-pressure, quasi-isentropic states of matter [J]. *Physics Plasmas*, 2005, 12(5): 056309.
- [23] REMINGTON B A, PARK H S, PRISBREY S T, et al. Progress towards materials science above 1000 GPa (10 Mbar) on the NIF laser: LLNL-CONF-411555 [R]. Livermore, CA: Lawrence Livermore National Laboratory, 2009.
- [24] BELOF J L, CAVALLO R M, OLSON R T, et al. Rayleigh-Taylor strength experiments of the pressure-induced phase transition in iron: LLNL-PROC-492911 [R]. Livermore, CA: Lawrence Livermore National Laboratory, 2011.
- [25] PIRIZ A R, LÓPEZ CELA J J, TAHIR N A. Richtmyer-Meshkov instability as a tool for evaluating material strength under extreme conditions [J]. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A*, 2009, 606(1/2): 139-141.
- [26] ATCHISON W L, ZOCHER M A, KAUL A M. Studies of material constitutive behavior using perturbation growth in explosive and magnetically driven liner systems [J]. *Russian Journal of Physical Chemistry B*, 2008, 2(3): 387-401.
- [27] PARK H S, BARTON N, BELOF J L, et al. Experimental results of tantalum material strength at high pressure and high strain rate [C]//AIP Conference Proceedings, 2012, 1426(1): 1371-1374.
- [28] BAI J S, WANG B, WANG T, et al. Numerical simulation of the Richtmyer-Meshkov instability in initially nonuniform flows and mixing with reshock [J]. *Physical Review E*, 2012, 86(6): 066319.
- [29] WANG T, TAO G, BAI J S, et al. Numerical comparative analysis of Richtmyer-Meshkov instability simulated by different SGS models [J]. *Canadian Journal of Physics*, 2015, 93(5): 519-525.
- [30] WANG T, LI P, BAI J S, et al. Large-eddy simulation of the Richtmyer-Meshkov instability [J]. *Canadian Journal of Physics*, 2015, 93(10): 1124-1130.

爆轰驱动铝飞层扰动增长的数值模拟

王 涛^{1,2}, 柏劲松¹, 曹仁义¹, 汪 兵¹,

钟 敏¹, 李 平¹, 陶 钢²

(1. 中国工程物理研究院流体物理研究所, 四川 绵阳 621999;

2. 南京理工大学能源与动力工程学院, 江苏 南京 210094)

摘要:建立了研究炸药爆轰驱动条件下金属材料 Rayleigh-Taylor 不稳定性问题的实验技术和数值模拟方法。利用该实验技术和数值模拟方法研究了炸药爆轰驱动条件下, 铝飞层界面 Rayleigh-Taylor 不稳定性增长规律, 数值模拟显示界面扰动振幅以指数规律增长。数值模拟结果和实验定性相符, 但是定量相比有较大差别, 原因是高压高应变率加载条件下铝的强度增强, 而数值模拟时所采用的 SG 本构模型在这样的加载条件下低估了铝的强度而导致对扰动增长致稳作用不足。然后在数值模拟中, 通过改变材料的初始剪切模量和初始屈服强度, 发现在一定范围内, 初始剪切模量对材料动态屈服强度没有影响, 而初始屈服强度增大可以明显提高材料的动态屈服强度, 达到抑制扰动增长的目的, 表明材料屈服强度主导界面扰动增长。

关键词:爆轰驱动; Rayleigh-Taylor 不稳定性; 扰动增长; 材料强度; 致稳

中图分类号: O33; O344. 3

文献标志码: A

doi: 10. 11858/gywlxb. 20170624

一种提高极值点处精度的三阶 WENO-Z 改进格式及应用^{*}

徐维铮^{1,2}, 吴卫国^{1,2}

(1. 武汉理工大学高性能舰船技术教育部重点实验室, 湖北 武汉 430063;

2. 武汉理工大学交通学院船舶、海洋与结构工程系, 湖北 武汉 430063)

摘要:高精度、高分辨率激波捕捉格式对含激波流场的数值模拟具有重要意义。为了提高三阶 WENO-Z 格式在极值点处的计算精度, 首先通过理论推导给出三阶 WENO 格式满足收敛精度的充分条件。采用泰勒级数展开的方式, 推导确定所构造格式的系数。通过精度测试证明改进格式在光滑流场区域能收敛到三阶精度。选用 Sod 激波管、Rayleigh-Taylor 不稳定性等经典算例证实了提出的改进格式 WENO-NN3 相较其他格式 (WENO-SJ3、WENO-Z3 和 WENO-N3) 具有精度高、耗散低、对流场结构分辨率高的特性。

关键词:三阶 WENO 格式; 光滑因子; 高精度; 高分辨率; 双曲守恒律

中图分类号:O357.1

文献标识码:A

冲击波流场包含激波间断和光滑流场等复杂结构, 对冲击波流场的模拟需要高精度、低耗散的激波捕捉格式。Liu 等^[1]于 1994 年, 在 ENO 格式^[2]构造思想的基础上首次提出 WENO 格式 (Weighted Essentially Non-Oscillatory Scheme) 的构造方法。Jiang 等^[3]在改进原始 WENO 格式光滑因子的基础上, 提出了三阶、五阶 WENO 格式的构造框架。目前, WENO 格式作为一种典型的高精度激波捕捉格式, 对流场内的激波间断具有较高的分辨率, 适于求解包含激波、膨胀波以及接触间断等复杂结构的流场, 并被大量研究者采用^[4-7]。然而 WENO 格式在极值点处会降阶, Henrick 等^[8]首先指出五阶 WENO 格式在连续解极值点处精度会降低 (五阶精度 WENO 格式在一阶极值点处会降为三阶) 的缺陷, 并提出基于映射函数的五阶 WENO-M 格式, 之后, Borges 等^[9]采用线性组合低阶模板光滑因子构造高阶全局光滑因子的方法, 提出五阶 WENO-Z 格式。在文献^[8-9]改进思想的基础上, 出现了大量的改进高阶 WENO 格式 (主要集中在五阶、七阶和九阶) 在极值点处精度的文献^[10-14]。针对三阶 WENO 格式的改进, Yamaleev 等^[15]在改进三阶 WENO-Z 格式中全局光滑因子的基础上, 通过理论推导给出三阶能量稳定 WENO 格式 (ESWENO)。Wu 等^[16-17]首先根据理论推导指出传统的三阶 WENO-Z 格式^[18]在极值点处会降阶, 其根据 Hu 等^[19]提出的构造思想, 通过线性组合局部模板和全局模板光滑因子的方式, 推导出改进的三阶 WENO 格式 (WENO-N3、WENO-NP3)。

在上述研究的基础上, 提出一种改进的三阶 WENO-Z 格式, 提高格式在极值点处的计算精度。选取 Sod 激波管、激波与熵波相互作用、Rayleigh-Taylor 等经典算例, 考察了改进格式 WENO-NN3 的计算性能。研究表明, 改进格式不仅提高了极值点处的计算精度, 还降低了格式的耗散, 提高了对流场结构的分辨率。

^{*} 收稿日期: 2017-12-29; 修回日期: 2018-02-11

基金项目: 装备预研教育部联合基金 (青年人才) (6141A020331); 国家自然科学基金 (51409202); 中央高校基本科研业务费 (2016-YB-016)

作者简介: 徐维铮 (1991—), 男, 博士, 主要从事爆炸波数值计算方法及程序开发研究。E-mail: xuweizheng@whut.edu.cn

通信作者: 吴卫国 (1960—), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事结构动力学及舰船抗爆抗冲击研究。E-mail: mailjt@163.com

1 控制方程

含激波流场采用可压缩欧拉方程进行描述,其具体形式为

$$\mathbf{Q}_t + \mathbf{E}_x + \mathbf{F}_y = 0 \quad (1)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{pmatrix}, \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(E + p) \end{pmatrix}, \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v u \\ \rho v^2 + p \\ v(E + p) \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$E = \rho e + \frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{1}{2} \rho v^2 \quad (3)$$

$$p = (\gamma - 1) \rho e \quad (4)$$

式中: ρ 是密度; u, v 是 x, y 方向上的速度分量; p 为流体压力; E 是单位体积流体的总能量; e 是比内能; γ 表示气体的绝热指数,本文中取为 1.4。

在方程(1)的每个方向上均可以看成是一个双曲守恒律方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

例如,针对 x 方向,方程(5)的数值离散形式为

$$\frac{du_i}{dt} = - \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_i} = - \frac{h_{i+1/2} - h_{i-1/2}}{\Delta x} \approx - \frac{1}{\Delta x} (\bar{f}_{i+1/2} - \bar{f}_{i-1/2}) \quad (6)$$

式中: $\bar{f}_{i-1/2}, \bar{f}_{i+1/2}$ 分别为单元 $(x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$ 的左、右对流项数值通量, Δx 为 x 方向的均匀网格间距,在本数值计算中, x, y 两个方向的网格间距相同。控制方程的空间离散采用下述的数值方法,时间项离散采用三阶 TVD 龙格库塔格式^[20]。

2 数值方法

2.1 三阶 WENO-JS 格式

2.1.1 数值重构过程

三阶 WENO 格式(WENO-JS3)的数值离散和推导过程如下^[3](为了简洁,仅仅给出右界面通量 $\bar{f}_{i+1/2}$ 的重构过程,左界面的数值通量重构与此相同,只是向左更换了一组模板)。对于三阶 WENO 格式, $\bar{f}_{i+1/2}$ 的 2 种重构方式分别为

$$f_{i+1/2}^0 = -\frac{1}{2}f_{i-1} + \frac{3}{2}f_i, \quad f_{i+1/2}^1 = \frac{1}{2}f_i + \frac{1}{2}f_{i+1} \quad (7)$$

利用上述两种二阶通量的凸组合计算最终具有三阶精度的数值通量 $\bar{f}_{i+1/2}$, 即

$$\bar{f}_{i+1/2} = \sum_{k=0}^1 \omega_k f_{i+1/2}^k = \omega_0 f_{i+1/2}^0 + \omega_1 f_{i+1/2}^1 \quad (8)$$

对于光滑情形,有 $\omega_0 = d_0 = \frac{1}{3}, \omega_1 = d_1 = \frac{2}{3}$ 。(8)式所给出的形式既适合光滑流场也适合含间断流场,对于含激波间断流场,式中的非线性权函数 ω_k 需要根据下式求得

$$\omega_k = \frac{\alpha_k}{\sum_{s=0}^1 \alpha_s}, \quad \alpha_k = \frac{d_k}{(\epsilon + \beta_k)^2}, \quad k = 0, 1 \quad (9)$$

式中:参数 ϵ 取值为 10^{-6} 。光滑因子 $\beta_k (k=0, 1)$ 的表达式为

$$\beta_0 = (f_{i-1} - f_i)^2, \quad \beta_1 = (f_i - f_{i+1})^2 \quad (10)$$

2.1.2 收敛精度的充分条件

在文献[15, 21]研究的基础上,对三阶 WENO 格式的收敛精度充分条件进行详细的推导证明。对

$f_{i\pm 1/2}^k$ 进行泰勒级数展开可得

$$f_{i\pm 1/2}^k = h_{i\pm 1/2} + A_k \Delta x^2 + o(\Delta x^3), \quad k=0,1 \quad (11)$$

根据(8)式、(11)式可得

$$\bar{f}_{i\pm 1/2} = \sum_{k=0}^1 \omega_k f_{i\pm 1/2}^k = \sum_{k=0}^1 d_k f_{i\pm 1/2}^k + \sum_{k=0}^1 (\omega_k - d_k) f_{i\pm 1/2}^k \quad (12)$$

紧接着根据(12)式,可得单元 $(x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$ 右界面通量 $\bar{f}_{i+1/2}$

$$\begin{aligned} \bar{f}_{i+1/2} &= \sum_{k=0}^1 d_k f_{i+1/2}^k + \sum_{k=0}^1 (\omega_k^+ - d_k) f_{i+1/2}^k \\ &= \sum_{k=0}^1 d_k f_{i+1/2}^k + \sum_{k=0}^1 (\omega_k^+ - d_k) (h_{i+1/2} + A_k \Delta x^2 + o(\Delta x^3)) \\ &= h_{i+1/2} + B^+ \Delta x^3 + o(\Delta x^4) + h_{i+1/2} \sum_{k=0}^1 (\omega_k^+ - d_k) + \\ &\quad \Delta x^2 \sum_{k=0}^1 A_k (\omega_k^+ - d_k) + \sum_{k=0}^{r-1} (\omega_k^+ - d_k) o(\Delta x^3) \end{aligned} \quad (13)$$

同理,左界面通量 $\bar{f}_{i-1/2}$ 为

$$\begin{aligned} \bar{f}_{i-1/2} &= \sum_{k=0}^1 d_k f_{i-1/2}^k + \sum_{k=0}^1 (\omega_k^- - d_k) f_{i-1/2}^k \\ &= \sum_{k=0}^1 d_k f_{i-1/2}^k + \sum_{k=0}^1 (\omega_k^- - d_k) (h_{i-1/2} + A_k \Delta x^2 + o(\Delta x^3)) \\ &= h_{i-1/2} + B^- \Delta x^3 + o(\Delta x^4) + h_{i-1/2} \sum_{k=0}^1 (\omega_k^- - d_k) + \\ &\quad \Delta x^2 \sum_{k=0}^1 A_k (\omega_k^- - d_k) + \sum_{k=0}^{r-1} (\omega_k^- - d_k) o(\Delta x^3) \end{aligned} \quad (14)$$

式中: $B^+ = B^-$, ω_k^- , ω_k^+ 分别对应左界面通量和右界面通量。进一步根据(6)式可得

$$\begin{aligned} \frac{\bar{f}_{i+1/2} - \bar{f}_{i-1/2}}{\Delta x} &= \frac{h_{i+1/2} - h_{i-1/2}}{\Delta x} + \frac{1}{\Delta x} [h_{i+1/2} \sum_{k=0}^1 (\omega_k^+ - d_k) - h_{i-1/2} \sum_{k=0}^1 (\omega_k^- - d_k)] + \\ &\quad \Delta x \sum_{k=0}^1 A_k (\omega_k^+ - \omega_k^-) + \sum_{k=0}^{r-1} (\omega_k^+ - d_k) o(\Delta x^2) - \sum_{k=0}^{r-1} (\omega_k^- - d_k) o(\Delta x^2) \\ &= f'_i + o(\Delta x^3) + \frac{1}{\Delta x} [h_{i+1/2} \sum_{k=0}^1 (\omega_k^+ - d_k) - h_{i-1/2} \sum_{k=0}^1 (\omega_k^- - d_k)] + \\ &\quad \Delta x \sum_{k=0}^1 A_k (\omega_k^+ - \omega_k^-) + \sum_{k=0}^{r-1} (\omega_k^+ - d_k) o(\Delta x^2) - \sum_{k=0}^{r-1} (\omega_k^- - d_k) o(\Delta x^2) \end{aligned} \quad (15)$$

根据(15)式可知,三阶 WENO 格式满足三阶收敛精度的充分必要条件

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^1 (\omega_k^+ - d_k) = o(\Delta x^4) \\ \sum_{k=0}^1 A_k (\omega_k^+ - \omega_k^-) = o(\Delta x^2) \\ (\omega_k^+ - d_k) = o(\Delta x) \end{cases} \quad (16)$$

然而很难根据(16)式进行格式非线性权重的设计,因此需要寻求更简洁的限制条件。根据(16)式,可以给出如下简洁的充分条件

$$\omega_k^+ - d_k = o(\Delta x^2) \quad (17)$$

2.2 三阶 WENO-NP3 格式

首先给出三阶 WENO-Z 格式^[18](WENO-Z3)的具体形式

$$\alpha = d_k \left(1 + \frac{\tau}{\beta_k + \epsilon} \right) \quad (18)$$

$$\tau = |\beta_0 - \beta_1| \quad (19)$$

Wu 等^[16]通过研究发现 WENO-Z3 格式在一阶极值点处精度降为一阶,并提出可改善分辨率的 WENO-N3 格式。为了提高三阶 WENO-Z 格式在极值点处精度,其在文献[17]中紧接着提出 WENO-NP3 格式,具体形式为

$$\alpha_k = d_k \left(1 + \frac{\tau_{NP}}{\beta_k + \epsilon} \right), \quad k = 0, 1 \quad (20)$$

$$\tau_{NP} = \left| \frac{\beta_0 + \beta_1}{2} - \beta_3 \right|^p, \quad \epsilon = 10^{-40}, \quad p = 3/2 \quad (21)$$

式中: β_3 表示三阶 WENO 格式全局模板 (x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) 的光滑因子

$$\beta_3 = \frac{13}{12} (f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1})^2 + \frac{1}{4} (f_{i-1} - f_{i+1})^2 \quad (22)$$

在 x_i 处对 β_3 进行泰勒级数展开,可得

$$\begin{aligned} \beta_3 = & f_i'^2 h^2 + \left(\frac{13}{12} f_i''^2 + \frac{1}{3} f_i' f_i'' \right) h^4 + \frac{1}{60} f_i' f_i^{(5)} h^6 + \frac{13}{72} f_i'' f_i^{(4)} h^6 + \frac{1}{36} f_i''^2 h^6 + \\ & \frac{1}{2520} f_i' f_i^{(7)} h^8 + \frac{13}{2160} f_i'' f_i^{(6)} h^8 + \frac{1}{360} f_i'' f_i^{(5)} h^8 + \frac{13}{1728} f_i^{(4)2} h^8 + o(h^{10}) \end{aligned} \quad (23)$$

2.3 改进的三阶 WENO-Z 格式

在三阶 WENO-NP3 构造思想启发下,本研究提出如下的构造方法(通过对权函数中的光滑因子进行非线性处理),并采用泰勒级数展开的方式进行理论推导,给出最终的构造格式

$$\alpha_k = d_k \left[1 + \frac{\tau_N}{(\beta_k + \epsilon)^p} \right], \quad k = 0, 1 \quad (24)$$

$$\tau_N = \left| \frac{\beta_0 + \beta_1}{2} - \beta_3 \right|, \quad \epsilon = 10^{-40} \quad (25)$$

在这里详细给出右界面通量 $\bar{f}_{i+1/2}$ 所对应权函数 ω_k^+ 的计算过程,将(10)式中的光滑因子在 x_i 处进行泰勒级数展开,可得

$$\begin{cases} \beta_0 = f_i'^2 h^2 - f_i' f_i'' h^3 + \left(\frac{1}{4} f_i''^2 + \frac{1}{3} f_i' f_i'' \right) h^4 - \frac{1}{12} f_i' f_i^{(4)} h^5 - \frac{1}{6} f_i'' f_i' h^5 + \frac{1}{60} f_i' f_i^{(5)} h^6 + \\ \quad \frac{1}{24} f_i'' f_i^{(4)} h^6 + \frac{1}{36} f_i''^2 h^6 - \frac{1}{360} f_i' f_i^{(6)} h^7 - \frac{1}{120} f_i'' f_i^{(5)} h^7 - \frac{1}{72} f_i' f_i^{(4)} h^7 + \\ \quad \frac{1}{2520} f_i' f_i^{(7)} h^8 + \frac{1}{720} f_i'' f_i^{(6)} h^8 + \frac{1}{360} f_i'' f_i^{(5)} h^8 + \frac{1}{576} f_i^{(4)2} h^8 + o(h^9) \\ \beta_1 = f_i'^2 h^2 + f_i' f_i'' h^3 + \left(\frac{1}{4} f_i''^2 + \frac{1}{3} f_i' f_i'' \right) h^4 + \frac{1}{12} f_i' f_i^{(4)} h^5 + \frac{1}{6} f_i'' f_i' h^5 + \frac{1}{60} f_i' f_i^{(5)} h^6 + \\ \quad \frac{1}{24} f_i'' f_i^{(4)} h^6 + \frac{1}{36} f_i''^2 h^6 + \frac{1}{360} f_i' f_i^{(6)} h^7 + \frac{1}{120} f_i'' f_i^{(5)} h^7 + \frac{1}{72} f_i' f_i^{(4)} h^7 + \\ \quad \frac{1}{2520} f_i' f_i^{(7)} h^8 + \frac{1}{720} f_i'' f_i^{(6)} h^8 + \frac{1}{360} f_i'' f_i^{(5)} h^8 + \frac{1}{576} f_i^{(4)2} h^8 + o(h^9) \end{cases} \quad (26)$$

根据(23)式、(26)式可知,在一阶极值点处($f_i' = 0, f_i'' \neq 0, f_i''' \neq 0$),可得

$$\begin{cases} \beta_0 = \frac{1}{4} f_i''^2 h^4 - \frac{f_i' f_i''}{6} h^5 + o(h^6) \\ \beta_1 = \frac{1}{4} f_i''^2 h^4 + \frac{f_i' f_i''}{6} h^5 + o(h^6) \end{cases} \quad (27)$$

$$\left| \frac{\beta_0 + \beta_1}{2} - \beta_3 \right| = \frac{5}{6} f_i''^2 h^4 + \frac{5}{36} f_i'' f_i^{(4)} h^6 + o(h^8) \quad (28)$$

将(27)式、(28)式代入(24)式中,可得

$$\alpha_0^+ = d_0 \left(1 + \frac{\tau_N}{\beta_0^p} \right) = d_0 \left[1 + \frac{5}{6} 4^p (f_i'')^{2-2p} h^{4-4p} + \frac{5p}{9} 4^p (f_i'')^{1-2p} f_i'' h^{5-4p} + o(h^{6-4p}) \right] \quad (29)$$

$$\alpha_1^+ = d_1 \left(1 + \frac{\tau_N}{\beta_1^p} \right) = d_1 \left[1 + \frac{5}{6} 4^p (f_i'')^{2-2p} h^{4-4p} - \frac{5p}{9} 4^p (f_i'')^{1-2p} f_i'' h^{5-4p} + o(h^{6-4p}) \right] \quad (30)$$

再根据(9)式中的加权法则,可得

$$\omega_0^+ = \frac{\alpha_0^+}{\alpha_0^+ + \alpha_1^+} = \frac{1}{3} + \frac{20p}{81} 4^p (f_i'')^{1-2p} f_i'' h^{5-4p} + o(h^{6-4p}) \quad (31)$$

$$\omega_1^+ = \frac{\alpha_1^+}{\alpha_0^+ + \alpha_1^+} = \frac{2}{3} - \frac{20p}{81} 4^p (f_i'')^{1-2p} f_i'' h^{5-4p} + o(h^{6-4p}) \quad (32)$$

同理可得,左界面通量 $\bar{f}_{i-1/2}$ 所对应权重函数 ω_k^-

$$\omega_0^- = \frac{1}{3} + \frac{40p}{243} \left(\frac{4}{9} \right)^p (f_i'')^{1-2p} f_i'' h^{5-4p} + o(h^{6-4p}) \quad (33)$$

$$\omega_1^- = \frac{2}{3} - \frac{40p}{243} \left(\frac{4}{9} \right)^p (f_i'')^{1-2p} f_i'' h^{5-4p} + o(h^{6-4p}) \quad (34)$$

根据(31)式~(34)式,可知

$$\omega_k^\pm - d_k = o(h^{5-4p}) \quad (35)$$

再根据(17)式给出的充分条件可得参数 p 的数值

$$5 - 4p = 2 \Rightarrow p = \frac{3}{4} \quad (36)$$

并将该格式命名为 WENO-NN3 格式。

3 数值试验

为了考察改进格式 WENO-NN3 格式的计算性能,选取线性精度测试、一维 Sod 激波管、激波与熵波相互作用、Rayleigh-Taylor 不稳定性等经典算例进行自主编程计算,并将该格式计算结果与格式 WENO-JS3、WENO-Z3 和 WENO-N3 进行对比。

3.1 精度测试

该算例选自文献[8],计算初始条件为

$$u_0(x) = \sin \left[\pi x - \frac{\sin(\pi x)}{\pi} \right] \quad (37)$$

其包含两个一阶极值点。表 1 给出 WENO-JS3、WENO-Z3、WENO-N3 和 WENO-NN3 格式的 L_1 误差和精度。

表 1 针对初始条件(37)式在计算时间 $t=2$ 时不同数值计算格式 L_1 误差和精度比较
Table 1 A comparative study of L_1 (error and order) for different schemes
with initial condition Eq. (37) at $t=2$

N	WENO-JS3		WENO-Z3	
	L_1 (Error)	L_1 (Order)	L_1 (Error)	L_1 (Order)
25	1.2429×10^{-1}		5.7276×10^{-2}	
50	4.6050×10^{-2}	1.4324	1.5116×10^{-2}	1.9219
100	1.3010×10^{-2}	1.8236	3.4645×10^{-3}	2.1254
200	1.5132×10^{-3}	3.1039	8.3721×10^{-4}	2.0490
400	1.4618×10^{-4}	3.3718	1.6823×10^{-4}	2.3152
N	WENO-N3		WENO-NN3	
	L_1 (Error)	L_1 (Order)	L_1 (Error)	L_1 (Order)
25	4.8254×10^{-2}		2.5954×10^{-2}	
50	1.1315×10^{-2}	2.0924	3.7961×10^{-3}	2.7734
100	2.5549×10^{-3}	2.1469	4.6605×10^{-4}	3.0260
200	4.9809×10^{-4}	2.3588	4.8657×10^{-5}	3.2598
400	1.0067×10^{-4}	2.3068	6.2941×10^{-6}	2.9506

根据表 1 可知,本研究提出的改进格式 WENO-NN3 在极值点处能达到三阶设计精度,与 2.3 节中的理论分析保持一致。

3.2 Sod 激波管

该算例初始条件^[22]为

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (1, 0, 1) & 0 \leq x < 0.5 \\ (0.125, 0, 0.1) & 0.5 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (38)$$

网格数为 200, 计算结束时间为 0.18。图 1 给出该算例计算结束时刻密度曲线图及局部放大图。

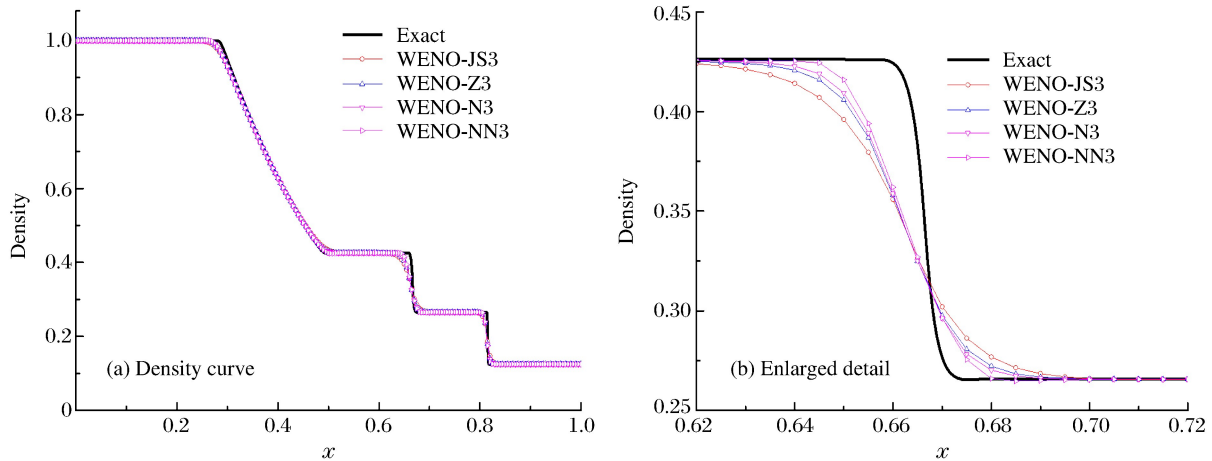


图 1 Sod 激波管计算结束后密度曲线及其局部放大图

Fig. 1 Density curve and partially enlarged detail at the final time for the Sod problem

3.3 激波与熵波相互作用

该算例初始条件^[20]为

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (3.857143, 2.629369, 10.33333) & -5 \leq x < -4 \\ (1 + 0.2\sin(5x), 0, 1) & -4 \leq x \leq 5 \end{cases} \quad (39)$$

网格数为 800, 计算结束时间为 1.8。图 2 给出了计算结束时刻密度曲线图及局部放大图。

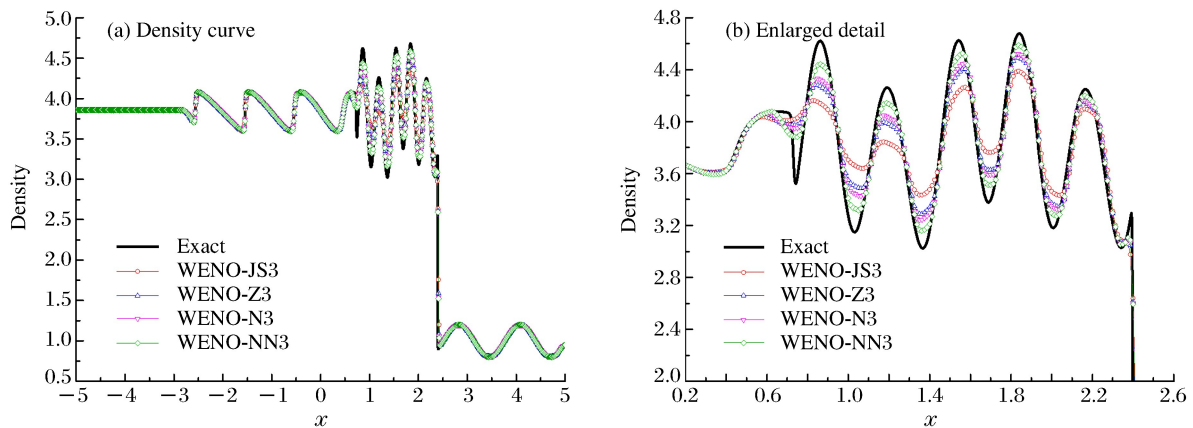


图 2 激波与熵波相互作用计算结束后密度曲线及其局部放大图

Fig. 2 Density curve and partially enlarged detail at the final time for the Shu-Osher problem

根据上述两个一维经典算例计算结果可知,改进格式 WENO-NN3 计算性能最优,相较其他格式(WENO-JS3、WENO-Z3 和 WENO-N3)不仅具有更低耗散性,同时具有较高的精度。

3.4 Rayleigh-Taylor 不稳定性

该问题主要描述重力场作用下,重流体加速进入轻流体界面失稳过程。文献[19,23-24]也采用该算例探讨数值方法的分辨率特性。计算域设置为 $[0, 0.25] \times [0, 1]$,计算初始条件为

$$(\rho, u, v, p) = \begin{cases} (2, 0, -0.025\sqrt{\gamma p/\rho}\cos(8\pi x), 2y+1) & 0 \leq y < 0.5 \\ (1, 0, -0.025\sqrt{\gamma p/\rho}\cos(8\pi x), y+1.5) & 0.5 \leq y < 1 \end{cases} \quad (40)$$

该算例中,绝热指数 γ 取为 $5/3$,左右边界设置成反射边界条件,顶部和底部边界条件分别为 $(\rho, u, v, p) = (1, 0, 0, 2.5)$, $(\rho, u, v, p) = (2, 0, 0, 1)$ 。计算结束时间为 1.95。

图 3 给出不同格式(WENO-JS3、WENO-Z3、WENO-N3 和 WENO-NN3)密度曲线图,网格数划分为 240×960 ,共绘制 15 条等值线,其取值区间为 $[0.952\ 269, 2.145\ 89]$ 。从图 3 接触间断附近精细结构的计算结果可以明显看出,改进格式 WENO-NN3 具有更好的分辨率特性。

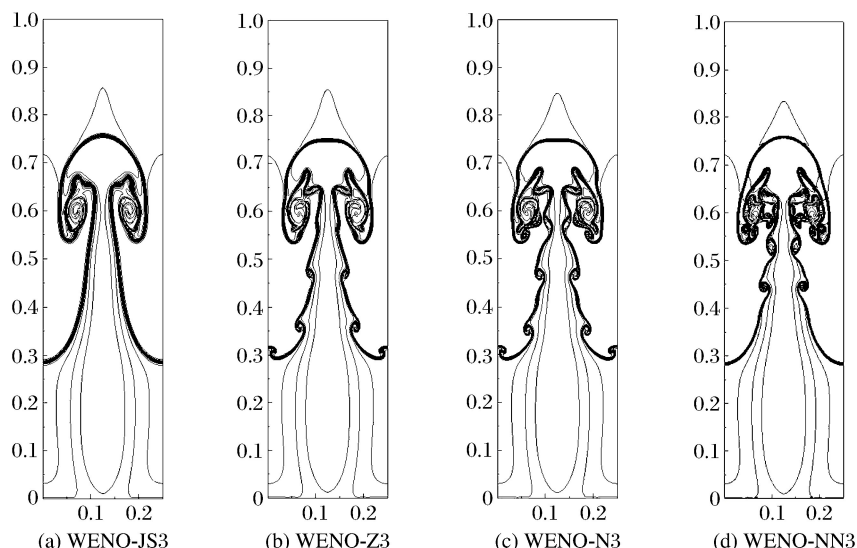


图 3 Rayleigh-Taylor 不稳定性问题不同格式(WENO-JS3、WENO-Z3、WENO-N3、WENO-NN3)密度曲线图

Fig. 3 Density contours of the Rayleigh-Taylor instability computed using WENO-JS3, WENO-Z3, WENO-N3, and WENO-NN3 schemes

3.5 Richtmyer-Meshkov 不稳定性

该算例选自文献[25],模拟激波管内马赫数为 2.0 的平面激波冲击三模正弦形式空气/氦气界面产生的不稳定现象。界面左端是空气介质,界面右端是氦气。计算域取为 $[0, 0.6] \times [0, 0.1]$,各介质的初始参数为

$$\begin{cases} (\rho, u, v, p)_L = (2.67, 1.48, 0, 4.5) \\ (\rho, u, v, p)_M = (1, 0, 0, 1) \\ (\rho, u, v, p)_R = (0.138, 0, 0, 1) \end{cases} \quad (41)$$

平面激波初始位置位于 $x = 0.06$,三模界面的初始位置见(42)式,初场分布见图 4。

$$x = 0.1 + 0.008\cos(60\pi y) \quad (42)$$

上下边界条件设置为固壁边界,左边界设置为反射边界条件,右边界设置为流出边界条件。计算网格数为 1200×200 ,计算结束时间为 17.22×10^{-2} 。图 5 给出了不同格式(WENO-JS3、WENO-Z3、WENO-N3 和 WENO-NN3)计算的密度曲线图,从图中尖钉结构可以明显看出,改进格式 WENO-NN3 格式具有更低的耗散性,描述出更精细的流场结构。

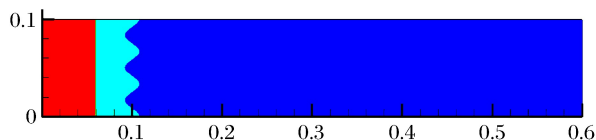


图 4 三模 Richtmyer-Meshkov 不稳定性初始条件设置
Fig. 4 Initial condition of the treble-mode Richtmyer-Meshkov instability

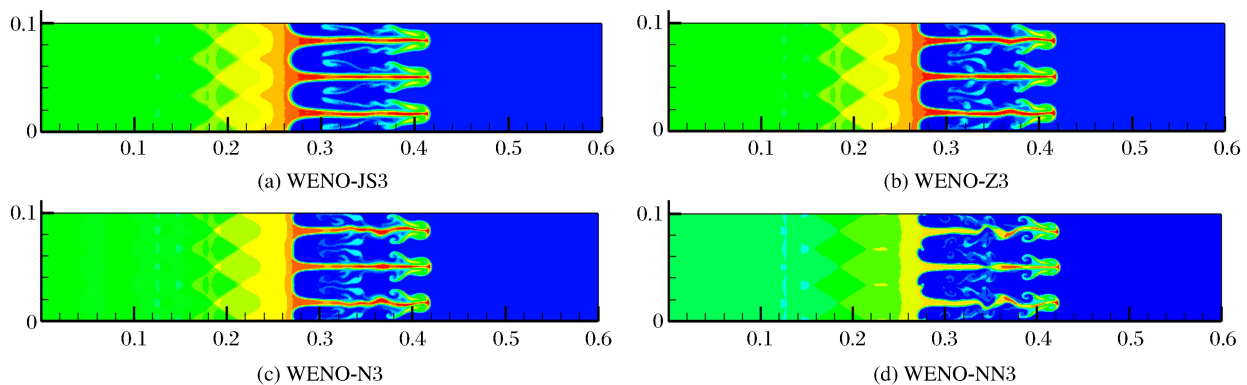


图5 三模 Richtmyer-Meshkov 不稳定性问题不同格式(WENO-JS3、WENO-Z3、WENO-N3、WENO-NN3)密度曲线图

Fig. 5 Density contours of the treble-mode Richtmyer-Meshkov instability computed using WENO-JS3, WENO-Z3, WENO-N3, and WENO-NN3 schemes

4 结 论

在理论分析的基础上,提出一种提高极值点计算精度的改进三阶 WENO-Z 格式,并通过精度测试、Sod 激波管等经典算例,从精度和耗散性两个角度考察了改进格式 WENO-NN3 的计算性能。

(1) 按照本研究的理论分析及数值精度测试,改进格式 WENO-NN3 格式能在极值点处达到收敛精度。推导的三阶 WENO 格式收敛精度的充分条件及采用泰勒展开的分析方法可以扩展应用到高阶格式。

(2) 改进格式 WENO-NN3 格式相较其他格式(WENO-JS3、WENO-Z3 和 WENO-N3)具有低耗散、高分辨率的特性。

参考文献:

- [1] LIU X D, OSHER S, CHAN T. Weighted essentially non-oscillatory schemes [J]. Journal of Computational Physics, 1994, 115(1): 200-212.
- [2] HARTEN A, ENGQUIST B, OSHER S, et al. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes (III) [C]//HUSSAINI M Y, VAN LEER B, VAN ROSENDALE J. Upwind and high-resolution schemes. Berlin, Heidelberg: Springer, 1987: 231-303.
- [3] JIANG G S, SHU C W. Efficient implementation of weighted ENO schemes [J]. Journal of Computational Physics, 1995, 126(1): 202-228.
- [4] HSIEH T J, WANG C H, YANG J Y. Numerical experiments with several variant WENO schemes for the Euler equations [J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2010, 58(9): 1017-1039.
- [5] ZHAO S, LARDJANE N, FEDIOUN I. Comparison of improved finite-difference WENO schemes for the implicit large eddy simulation of turbulent non-reacting and reacting high-speed shear flows [J]. Computers & Fluids, 2014, 95(3): 74-87.
- [6] WANG C, DING J X, SHU C W, LI T. Three-dimensional ghost-fluid large-scale numerical investigation on air explosion [J]. Computers & Fluids, 2016, 137: 70-79.
- [7] ZAGHI S, MASCIU A D, FAVINI B. Application of WENO-positivity-preserving schemes to highly under-expanded jets [J]. Journal of Scientific Computing, 2016, 69(3): 1-25.
- [8] HENRICK A K, ASLAM T D, POWERS J M. Mapped weighted essentially non-oscillatory schemes: achieving optimal order near critical points [J]. Journal of Computational Physics, 2005, 207(2): 542-567.
- [9] BORGES R, CARMONA M, COSTA B, et al. An improved weighted essentially non-oscillatory scheme for hyperbolic conservation laws [J]. Journal of Computational Physics, 2008, 227(6): 3191-3211.
- [10] YAMALEEV N K, CARPENTER M H. A systematic methodology for constructing high-order energy stable WENO schemes [J]. Journal of Computational Physics, 2009, 228: 4248-4272.

- [11] CASTRO M, COSTA B, DON W S. High order weighted essentially non-oscillatory WENO-Z schemes for hyperbolic conservation laws [J]. *Journal of Computational Physics*, 2011, 230(5): 1766-1792.
- [12] HA Y, KIM C H, LEE Y J, et al. An improved weighted essentially non-oscillatory scheme with a new smoothness indicator [J]. *Journal of Computational Physics*, 2013, 232(1): 68-86.
- [13] SHEN Y Q, ZHAO G C. Improvement of weighted essentially non-oscillatory schemes near discontinuities [J]. *Computers & Fluids*, 2014, 96(12): 1-9.
- [14] CHANG H K, HA Y, YOON J. Modified non-linear weights for fifth-order weighted essentially non-oscillatory schemes [J]. *Journal of Computational Science*, 2016, 67(1): 299-323.
- [15] YAMALEEV N K, CARPENTER M H. Third-order energy stable WENO scheme [J]. *Journal of Computational Physics*, 2013, 228(8): 3025-3047.
- [16] WU X S, ZHAO Y X. A high-resolution hybrid scheme for hyperbolic conservation laws [J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2015, 78(3): 162-187.
- [17] WU X, LIANG J, ZHAO Y. A new smoothness indicator for third-order WENO scheme [J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2016, 81(7): 451-459.
- [18] DON W S, BORGES R. Accuracy of the weighted essentially non-oscillatory conservative finite difference schemes [J]. *Journal of Computational Physics*, 2013, 250(4): 347-372.
- [19] HU X Y, WANG Q, ADAMS N A. An adaptive central-upwind weighted essentially non-oscillatory scheme [J]. *Journal of Computational Physics*, 2010, 229(23): 8952-8965.
- [20] SHU C W, OSHER S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes, II [J]. *Journal of Computational Physics*, 1989, 77(2): 439-471.
- [21] GANDE N R, RATHOD Y, RATHAN S. Third-order WENO scheme with a new smoothness indicator [J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2017, 85(2): 171-185.
- [22] SOD G A. A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws [J]. *Journal of Computational Physics*, 1978, 27(1): 1-31.
- [23] SHI J, ZHANG Y T, SHU C W. Resolution of high order WENO schemes for complicated flow structures [J]. *Journal of Computational Physics*, 2003, 186(2): 690-696.
- [24] ACKER F, BORGES R, COSTA B. An improved WENO-Z scheme [J]. *Journal of Computational Physics*, 2016, 313: 726-753.
- [25] ZHANG P G, WANG J P. A newly improved WENO scheme and its application to the simulation of Richtmyer-Meshkov instability [J]. *Procedia Engineering*, 2013, 61: 325-332.

An Improved Third-Order WENO-Z Scheme for Achieving Optimal Order near Critical Points and Its Application

XU Weizheng^{1,2}, WU Weiguo^{1,2}

(1. *Key Laboratory of High Performance Ship Technology of Ministry of Education, Wuhan University of Technology, Wuhan 430063, China;*

2. *Departments of Naval Architecture, Ocean and Structural Engineering, School of Transportation, Wuhan University of Technology, Wuhan 430063, China)*

Abstract: A high-precision and resolution shock capturing scheme is of great significance for numerical simulation of the complex flow field containing shock waves. In this study, to improve the convergence accuracy of the conventional third-order WENO-Z scheme at the critical points, we firstly derived the sufficient conditions for satisfying the convergence precision of the third-order WENO scheme from the theoretical derivation, then determined the parameters of the constructed scheme using the Taylor series expansion for satisfying the sufficient conditions, and proved using the accuracy test that the proposed scheme converges to the third order precision in smooth flow field including the critical points. Furthermore, we selected the Sod shock tube, the Rayleigh-Taylor instability and some other classic examples, verifying that the improved scheme WENO-NN3 was capable of giving more precision and high resolution results of the complex flow field structures compared with other WENO schemes such as the WENO-JS3, WENO-Z3, and WENO-N3.

Keywords: third-order WENO scheme; smoothness indicators; high precision; high resolution; hyperbolic conservation law

拉氏方法模拟二维多介质可压缩流体的运动^{*}

赵海波, 肖 波, 柏劲松, 段书超, 王刚华, 阚明先, 陈 芳

(中国工程物理研究院流体物理研究所, 四川 绵阳 621999)

摘要:在用拉格朗日方法模拟二维多介质可压缩流体的运动时, 网格发生大变形往往是模拟不能正常进行下去的重要原因。网格动态局域重分可以有效改善网格的畸变程度, 使计算得以持续。针对三角形计算网格提出了一种新的动态局域重分方法, 包含“对角线交换”“长边劈裂”“短边融合”和“帽子戏法”4种基本操作, 其中前3种操作不仅作用于同种介质内部, 还可将其拓展到多介质界面处, 与“帽子戏法”一起处理界面附近的大变形网格。在网格动态局域重分后, 将旧网格上的物理量映射到新网格上, 先计算出新三角形的质量和内能, 再根据动量守恒和能量守恒对新三角形的格点速度及内能进行修正。利用该方法对冲击波与气泡相互作用和 R-T 不稳定性问题进行了数值模拟, 取得了良好的效果。在 R-T 不稳定性算例中, 采用同种介质和不同介质两种模型进行对比, 模拟结果验证了该方法的有效性。

关键词:多介质流体; 大变形运动; 交错网格; 网格动态局域重分; 守恒重映

中图分类号: O354

文献标识码: A

注:本文附加材料见网络版

采用拉氏方法模拟多介质可压缩流体运动, 可以避免因为输运项带来的数值耗散, 并且可以精确描述物质界面。但是当流体发生大变形时, 拉氏方法将面临网格畸变的情况, 导致模拟难以进行下去。当前模拟大变形多介质可压缩流体运动较常见的方法是在一般的任意拉格朗日-欧拉(简称 ALE)方法^[1]基础上发展起来的多介质 ALE 方法^[2-5]。该方法通常包括3个步骤: 首先, 利用拉氏方法计算下一时刻的物理量; 然后, 调整网格格点坐标, 改善网格单元品质; 最后将旧网格上的物理量映射到新网格上去。在多介质 ALE 方法中, 当物质界面发生极端变形(例如界面翻卷形成漩涡)时, 为了保持界面处的网格单元品质, 会允许界面处的网格发生跨物质运动, 同时需要引入混合物质网格单元描述, 此时该方法与欧拉方法已无太大区别。欧拉方法中常用的混合网格界面追踪方法如 VOF (Volume of Fluid)^[6] 或 MOF (Moment-of-Fluid)^[7] 等, 也因此常常被用于多介质 ALE 方法以实现界面重构。总的来说, 多介质 ALE 方法的算法复杂度较高, 实现起来并不容易。本研究将讨论在纯拉氏方法中引入网格动态局域重分以消除畸变网格, 并在重映过程中避免出现混合物质网格, 实现对多介质大变形流体运动过程的纯拉氏模拟。

网格动态局域重分方法是近来人们研究较多的一种方法, 国内外学者提出了各种网格动态局域重分算法^[8-10]来处理大变形网格或者实现网格自适应, 这些算法一般会改变格点之间的连接方式, 但不改变格点的位置, 文献中将这类方法称为 h-remeshing。在 h-remeshing 中, 首先需要定义“质量函数”, 即描述网格单元的几何品质, 通常从网格的大小和形状两个角度去设置质量函数。然后, 根据质量函数给出大变形网格或者需要处理网格的判断条件。最后根据判断条件给出具体的操作过程, 如: 针对三角形

^{*} 收稿日期: 2017-12-21; 修回日期: 2018-01-09

基金项目: 科学挑战计划(TZ2016001); 国家自然科学基金(11405167, 11571293, 11672276, 11532012); 中国工程物理研究院科学技术发展基金(2015B0201023)

作者简介: 赵海波(1994—), 男, 硕士研究生, 主要从事计算流体力学研究. E-mail: 18310737226@163.com

通信作者: 柏劲松(1968—), 男, 研究员, 博士生导师, 主要从事计算力学研究. E-mail: bjsong@foxmail.com

网格,通常包括“对角线交换”“长边劈裂”和“短边融合”^[11];针对四面体网格,包括“空间翻转”“删除边长”和“插入格点”等^[9]。目前文献上关于网格动态局域重分基本都是针对同种介质内部的情形,将该方法拓展到多物质界面处会面临一些新的难点,包括如何尽可能地避免对原物质界面进行修改,在不得已修改物质界面的情况下如何处理横跨原物质界面的网格单元,等等。

本研究提出了一种应用于多介质流体模拟的动态局域重分方法,它包含4种基本操作:“对角线交换”“长边劈裂”“短边融合”和“帽子戏法”。该重分方法不仅作用于单介质内部而且可以作用于多物质界面处。网格重分完成后,则需要将旧网格上的物理量映射到新网格上。动态局域重分方法的物理量重映比一般的网格重分的物理量重映其实更简单,只需要对4种网格重分操作完成重映即可。对于在物质界面处产生的横跨多物质的新网格单元,本研究中采用一种单物质描述。在这种描述下,不可避免地需要在网格单元之间进行物质迁移。为了尽可能降低人为的物质迁移所带来的数值误差,对物质界面处的网格重分采用更严格的重分判据,降低操作次数,并且引入“帽子戏法”操作以减少物质迁移。基于以上方法,对冲击波与气泡相互作用和 Rayleigh-Taylor(R-T)不稳定现象两个算例进行数值模拟,以此验证了该方法模拟多介质大变形运动的有效性。

1 交错网格型拉氏方法的离散格式

计算网格为三角形网格,采用交错网格型拉格朗日方法,即:速度定义在网格格点上,质量和内能定义在网格中心,如图1所示。离散格式与文献[10]中的一致,具体为

$$m_c = \text{const} \quad (1)$$

$$m_p = \frac{1}{3} \sum_{c \in C(p)} m_c \quad (2)$$

$$\mathbf{x}_p^{n+1} = \mathbf{x}_p^n + \Delta t \mathbf{u}_p^n + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 \frac{\sum_{c \in C(p)} \mathbf{f}_{pc}^n}{m_p} \quad (3)$$

$$\mathbf{u}_p^{n+1} = \mathbf{u}_p^n + \Delta t \frac{\sum_{c \in C(p)} \mathbf{f}_{pc}^n}{m_p} \quad (4)$$

$$E_c^{n+1} = E_c^n - \sum_{p \in P(c)} \mathbf{f}_{pc}^n \cdot (\mathbf{x}_p^{n+1} - \mathbf{x}_p^n) \quad (5)$$

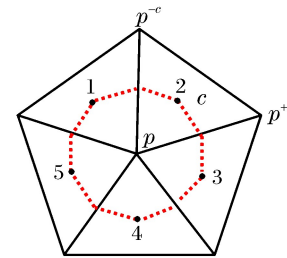


图1 交错网格型拉格朗日方法^[10]

Fig. 1 Staggered grid hydrodynamics Lagrangian discretization

式中: m_c 为三角形单元 c 的质量; m_p 为格点 p 的质量; $C(p)$ 是包含该格点的所有三角形的集合; $P(c)$ 是属于三角形 c 的格点的集合; $\mathbf{x}$ 、 $\mathbf{u}$ 、 Δt 分别为格点的位移、速度和时间步长; E_c 为三角形单元 c 的内能; n 和 $n+1$ 分别表示第 n 和第 $n+1$ 时刻; $\mathbf{f}_{pc}$ 表示网格单元 c 对其格点 p 的作用力,具体表达式为

$$\mathbf{f}_{pc} = (p_c + q_c) \begin{pmatrix} -\frac{y_{p^-(c)} - y_{p^+(c)}}{2} \\ \frac{x_{p^-(c)} - x_{p^+(c)}}{2} \end{pmatrix} \quad (6)$$

式中: p_c 表示网格单元的压强值; q_c 表示作用在网格上的黏性力大小,具体可以写为

$$q_c = \rho c_v \dot{v} \quad (7)$$

式中: ρ 为网格单元的密度, c_v 为黏性系数, $\dot{v}$ 为体积相对变化率。

上述(1)式~(5)式是拉氏方法的离散格式:(1)式表示网格单元质量不随时间变化;(2)式是格点质量与包含该格点的网格单元质量的关系,本研究中假定每个网格单元将质量均分给3个格点;(3)式、(4)式决定了格点在 Δt 时间内的位移变化和速度变化;(5)式决定了网格单元在 Δt 时间内的内能变化。

每个单元对应的计算时间步长的表达式为

$$\Delta t = \frac{C_{\text{safe}} h_{\min}}{v_s} \quad (8)$$

式中: C_{safe} 是时间因子,取为 0.05; $h_{\min}$ 是三角形单元中最短高的长度, v_s 是网格单元的声速大小。最终选取所有网格单元时间步长中的最小值作为整体的 Δt 。

2 网格动态局域重分算法

采用网格动态局域重分处理在拉氏模拟中遇到的大变形网格,具体包含 4 种基本操作:“对角线交换”“长边劈裂”“短边融合”“帽子戏法”。在执行过程中,会根据不同的判断标准选择相应的网格操作。

2.1 周期性网格

模拟过程中采用周期性网格。所谓周期性网格,是指物理边界处网格的空邻域被其相对物理边界处的网格所替换。如图 2 所示,三角形 $\triangle_1$ 的原空邻域被其相对物理边界处的三角形 $\triangle_2$ 所替换。采用周期性网格将使每个单元不出现空邻域,使程序代码变得更简洁。

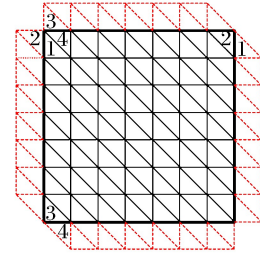


图 2 周期性网格

Fig. 2 Periodical mesh

2.2 网格重分基本操作

针对多介质流体运动的模拟,不涉及滑移现象和滑移算法,即:在界面处两种介质共用一层格点。在模拟的过程中,界面有可能发生大变形,导致模拟进行不下去,此时需要对界面处的大变形网格进行特殊处理。本研究中,对横跨原物质界面的网格采用单介质描述。此种处理有可能导致界面形状改变以及物质局域的人为迁移,我们将其视为一种让步,是保证不出现“混合网格”所需要付出的代价。为此,在算法中尽量限制了对物质界面处网格的处理次数,以降低方法所带来的误差。下面介绍详细的操作流程。

2.2.1 对角线交换

以三角形是否存在大于给定角度值的内角作为判断标准进行对角线交换操作。如图 3(a)所示,当 $\triangle ABC$ 的最大角 $\angle ABC$ 大于某个值(本研究取 $2\pi/3$)时,则找到与 $\triangle ABC$ 的最长边 AC 相邻的 $\triangle ACD$,在这两个三角形组成的四边形 $ABCD$ 中进行对角线交换操作。图 3(a)中, $\triangle ABC$ 与 $\triangle ACD$ 包含相同的介质。如果两个三角形包含不同的介质,即 AC 是物质界面时,如果发生了对角线交换,则操作如图 3(b)所示。在这个过程中,有可能带来物质界面形状的变化,即界面形状由 AC 变为 ADC ,但是基于以下两点,可以将该影响降低。

(1) 将该操作的要求提高,比如当 $\angle ADC$ 大于更大的值(本研究取 $3\pi/4$)时才进行对角线交换,可以从两方面降低该操作对界面形状的影响:一是提高判断标准,则执行次数将减少;二是 $\angle ADC$ 越大,则 ADC 越接近 AC ,物质界面形状的改变越小。

(2) 增加网格数目,则单个网格描述的界面长度减少,从而降低界面操作对界面形状的影响。

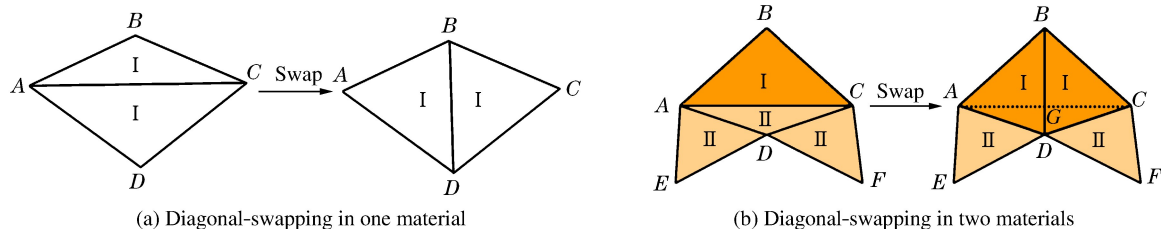


图 3 对角线交换操作

Fig. 3 Diagonal-swapping

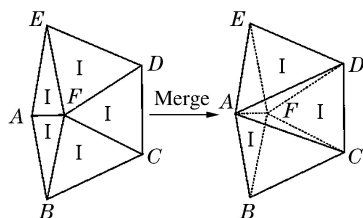
2.2.2 长边劈裂

该操作发生的条件是三角形的最长边大于某个给定的长度。如图 4 所示,当 $\triangle ABC$ 的最长边 AC 的长度大于给定值 L_1 (本研究取为 $2L$, 其中 L 是初始时刻网格边长的平均长度)时,则在 AC 边的中点

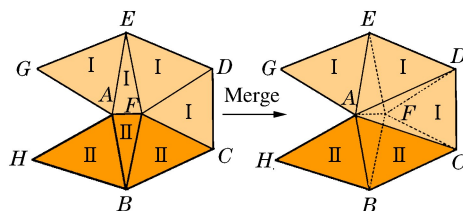
插入 E 点,将原来的 2 个三角形分裂为 4 个三角形。该操作不涉及界面形状的改变。当该操作发生在物质界面处时,则判断标准更加严格,即 L_1 值降低(本研究取为 L),在一定情况下使描述界面的格点数目增多。

2.2.3 短边融合

与“长边劈裂”相反,“短边融合”操作处理的是由于三角形边长过短而带来的畸变问题。在程序中,计算出三角形最短边的长度,再将最短边的长度与给定的长度值 L_2 (本研究取为 $0.5L$) 比较,如果最短边的长度小于 L_2 ,则删除该边及相应的三角形并且改变格点之间的连接方式。如图 5(a) 所示,当 AF 边小于 L_2 时,则删除 AF 边,相应的 $\triangle AEF$ 和 $\triangle ABF$ 也会被删除掉,原来与 F 点相连接的格点重新与 A 点连接以组成新的三角形。以上操作针对的是同种材料。当被删除格点周围的三角形材料不同时,操作如图 5(b) 所示。该操作也可能带来物质界面形状的变化。与“对角线交换”操作类似,可以通过提高该操作的判断条件和加密网格将其影响降低。该过程可以看作对界面的一种“平滑”处理,网格越密,操作带来的误差越低。



(a) Edge-merging in one material



(b) Edge-merging in two materials

图5 短边融合操作

Fig. 5 Edge-merging

2.2.4 帽子戏法

该操作处理的是位于界面处的三角形网格。如图 6 所示, AD 是物质界面, $\triangle ABF$ 、 $\triangle BCF$ 、 $\triangle CDF$ 和 $\triangle ADF$ 由同种材料构成, $\triangle ADE$ 由另外一种材料构成。在该操作中,同样是以三角形是否存在大于某角度值的内角作为发生条件,但是与多物质界面处的对角线交换发生条件略有不同,比如当 $\angle AFD$ 大于某个角度(本研究取 $3\pi/4$) 且 F 点周围的三角形由同种介质构成时,将 F 点移动到 AD 边的中点 G ,同时连接 EG 。这样就在一定程度上改善了界面处三角形网格品质而不引起界面形状的改变。引入该操作的目的是为了在多物质界面处尽可能代替“对角线交换”,从而减少物质迁移带来的误差。

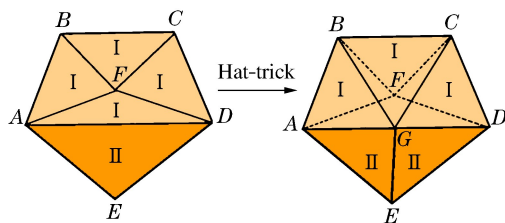


图6 帽子戏法操作

Fig. 6 Hat-trick on the interface

2.3 网格重分操作流程

采用如图 7 所示的流程将以上 4 种操作组织起来,数值模拟证明该流程可以有效地处理大变形网格。具体为:

- (1) 利用三角形的角度和介质种类作为判断条件,执行一轮“对角线交换”和“帽子戏法”;
- (2) 利用三角形的边长作为判断条件,执行一轮“长边劈裂”;
- (3) 再次执行多次“对角线交换”和“帽子戏法”,以改善(2)中新生成网格的品质;

(4) 根据三角形的边长判断是否需要执行“短边融合”,如需要,则执行完后再次执行多次“对角线交换”和“帽子戏法”,然后返回步骤(2);否则该流程结束。

在程序实现过程中,“对角线交换”和“帽子戏法”放在方法 SwapWithHatTrickForOneTurn (伪代码见附加材料 1) 中,“长边劈裂”放在方法 SplitForOneTurn (伪代码见附加材料 2) 中,“短边融合”放在方法 MergeForOneTurn (伪代码见附加材料 3) 中。

3 物理量重映

网格重分后,需要将旧网格上的物理量重新映射到新网格上去。在重映过程中,需要保证物理量守恒,即质量、动量、能量守恒。先求出新三角形的质量和内能,再根据动量和能量守恒对新三角形的格点速度及内能做一个修正。在重映的过程中,假设网格单元的质量密度和比内能为常数分布。在以上 4 种网格基本操作中:“长边劈裂”和“帽子戏法”的物理量重映在网格内统一处理,不需要区分单介质内或者物质界面处;而“对角线交换”和“短边融合”则需要做此区分,因为它们涉及到物质是否迁移。

3.1 “对角线交换”后的物理量守恒重映

如图 3 所示,执行完“对角线交换”后,四边形 $ABCD$ 的对角线由 AC 变为 BD ,旧三角形 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 变为新三角形 $\triangle ABD$ 和 $\triangle BCD$ 。接下来进行物理量重映,分两种情况处理。

(1) $\triangle ABC$ 与 $\triangle ACD$ 包含相同的介质,如图 3(a) 所示。

首先进行质量和内能重映,假设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 的质量密度分别为 ρ_{ABC} 和 ρ_{ACD} ,比内能为 e_{ABC} 和 e_{ACD} ,面积为 s_{ABC} 和 s_{ACD} ,则新 $\triangle ABD$ 的质量 m_{ABD} 和内能 E_{ABD} 分别为

$$m_{ABD} = m_{ABG} + m_{ADG} = \rho_{ABC}s_{ABG} + \rho_{ACD}s_{ADG} \quad (9)$$

$$E_{ABD} = E_{ABG} + E_{ADG} = e_{ABC}m_{ABG} + e_{ACD}m_{ADG} \quad (10)$$

新三角形 $\triangle ABD$ 的密度 ρ_{ABD} 为

$$\rho_{ABD} = m_{ABD} / s_{ABD} \quad (11)$$

用同样的方法可以得到新三角形 $\triangle BCD$ 的密度和内能。得到了新三角形的质量,根据(2)式则可以求得格点的新质量,为了计算格点新速度,需要计算出在质量重映过程中动量的改变量。即先假设每个格点的速度不发生变化,则每个格点的质量变化所带来的动量改变量 $\Delta \mathbf{M}$ 为

$$\Delta \mathbf{M} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{v}_i \cdot \Delta m_i \quad (12)$$

式中: $\mathbf{v}_i$ 是该格点的速度, Δm_i 是该格点的质量变化值。然后利用动量改变量求出所有格点的速度修正值

$$\mathbf{v}^{\text{Revised}} = \frac{\Delta \mathbf{M}}{\sum_{i=1}^n m_i^{\text{New}}} \quad (13)$$

则格点的新速度为

$$\mathbf{v}_i^{\text{New}} = \mathbf{v}_i^{\text{Old}} + \mathbf{v}^{\text{Revised}} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (14)$$

同样地,根据能量守恒求三角形的内能修正量,首先计算出动能的改变量 ΔE^k

$$\Delta E^k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 m_i^{\text{New}} (\mathbf{v}_i^{\text{New}})^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 m_i^{\text{Old}} (\mathbf{v}_i^{\text{Old}})^2 \quad (15)$$

式中: m_i^{New} 和 m_i^{Old} 分别为新、旧格点的质量, $\mathbf{v}_i^{\text{New}}$ 与 $\mathbf{v}_i^{\text{Old}}$ 分别为新、旧格点的速度。根据能量守恒,动能改变量的大小等于内能改变量的大小,然后将内能改变量均分给所涉及的三角形

$$E^{\text{Revised}} = -\Delta E^k / 2 \quad (16)$$

则新三角形修正后的内能为

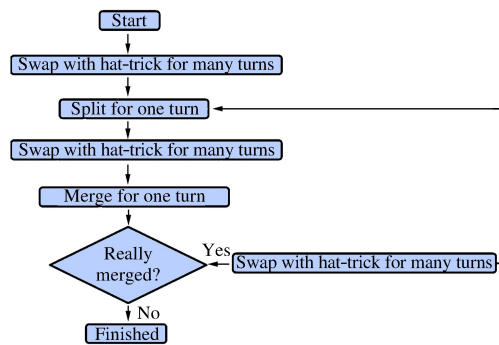


图 7 网格动态局域重分流程图

Fig. 7 Main flow of the remeshing algorithm

$$E'_i = E_i + E^{\text{Revised}} \quad (i=1,2) \quad (17)$$

(2) $\triangle ABC$ 与 $\triangle ACD$ 包含不同的介质,如图 3(b)所示。

在这种情况下,为了保证不出现“混合网格”,将 $\triangle ACD$ 中的物质转移到与之相邻且包含同种材料的三角形中去。假设 $\triangle ADE$ 和 $\triangle CDF$ 含有与 $\triangle ACD$ 相同的材料,则

$$m'_{ADE} = m_{ADE} + m_{ACD}/2, \quad m'_{CDF} = m_{CDF} + m_{ACD}/2 \quad (18)$$

$$E'_{ADE} = E_{ADE} + E_{ACD}/2, \quad E'_{CDF} = E_{CDF} + E_{ACD}/2 \quad (19)$$

式中: m' 和 E' 表示新质量和新内能。

$\triangle ABD$ 和 $\triangle BCD$ 则分别继承 $\triangle ABG$ 和 $\triangle BCG$ 的物质,即

$$m_{ABD} = m_{ABG}, \quad m_{BCD} = m_{BCG} \quad (20)$$

$$E_{ABD} = E_{ABG}, \quad E_{BCD} = E_{BCG} \quad (21)$$

得到新三角形的质量后,根据(2)式计算出格点的新质量。然后采用与上述类似的方法对速度和内能进行修正。特别提到, $\triangle ADE$ 和 $\triangle CDF$ 的物质不总是与 $\triangle ACD$ 的物质相同,有可能只有一个三角形与 $\triangle ACD$ 的物质相同,在这种情况下,将 $\triangle ACD$ 所有的物质转移到该三角形中;而如果没有三角形与 $\triangle ACD$ 的物质相同,则 $\triangle ACD$ 中的物质将被丢弃。

3.2 “长边劈裂”后物理量守恒重映

如图 4 所示,当 AC 边大于给定值的时候,则进行“长边劈裂”操作,由长边 AC 变为两个短边 AE 和 CE 。本研究中假设格点 E 位于 AC 边的中点处,且其速度为格点 A 和格点 C 速度之和的一半,即

$$\begin{cases} \mathbf{x}_E = (\mathbf{x}_A + \mathbf{x}_C)/2 \\ \mathbf{v}_E = (\mathbf{v}_A + \mathbf{v}_C)/2 \end{cases} \quad (22)$$

式中: $\mathbf{x}$ 表示位置, $\mathbf{v}$ 表示速度。三角形的数目由原来的 2 个变为 4 个。接下来进行物理量重映。

首先进行质量和内能重映。假设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 的质量分别为 m_{ABC} 和 m_{ACD} , 内能为 E_{ABC} 和 E_{ACD} , 则新三角形 $\triangle ABE$ 、 $\triangle BCE$ 、 $\triangle CDE$ 、 $\triangle ADE$ 的质量和内能分别为

$$m_{ABE} = \frac{1}{2}m_{ABC}, \quad m_{BCE} = \frac{1}{2}m_{ABC}, \quad m_{CDE} = \frac{1}{2}m_{ACD}, \quad m_{ADE} = \frac{1}{2}m_{ACD} \quad (23)$$

$$E_{ABE} = \frac{1}{2}E_{ABC}, \quad E_{BCE} = \frac{1}{2}E_{ABC}, \quad E_{CDE} = \frac{1}{2}E_{ACD}, \quad E_{ADE} = \frac{1}{2}E_{ACD} \quad (24)$$

新三角形的密度为

$$\rho_{ABE} = \rho_{BCE} = \rho_{ABC}, \quad \rho_{CDE} = \rho_{ADE} = \rho_{ACD} \quad (25)$$

求得新三角形的质量后,根据(2)式可以求得格点的新质量。同样地,根据动量守恒修正格点速度,根据能量守恒修正新三角形的内能。

3.3 “短边融合”后的物理量守恒重映

在图 5 中,执行完“短边融合”操作后,原格点 F 、 $\triangle ABF$ 和 $\triangle AEF$ 将被删除。原来与 F 点连接的格点重新与格点 A 相连组成新的三角形。在执行“短边融合”的操作时,新旧三角形的数目会发生变化,因此在计算新三角形的物理量时需要提前计算重叠系数 C_j^i 。如图 8 所示, C_j^i 指新三角形 $\triangle_i$ 中包含旧三角形 $\triangle_j$ 的部分占旧三角形 $\triangle_j$ 的比例,此处比例指的是面积比例。例如: C_1^1 表示新三角形 $\triangle ABC$ 中包含旧三角形 $\triangle ABF$ 的部分(红色区域)占 $\triangle ABF$ 面积的比例。由于本研究假设在网格单元中物理量(质量、内能)密度是常数,因此网格单元的面积之比等于网格内的物理量(质量、内能)大小之比。已知重叠系数可以很方便地计算新三角形的质量和内能。

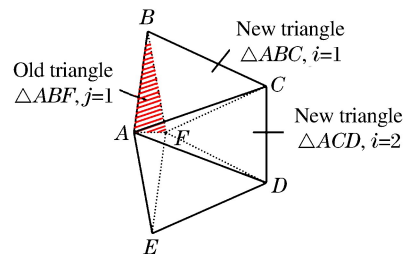


图 8 计算重叠系数

Fig. 8 Calculation of overlapping coefficients

接下来进行物理量重映,分为两种情况。

(1) “短边融合”发生在同种介质中,如图 5(a)所示。

首先对质量和内能进行重映。假设旧三角形的质量和内能为 $m_j, E_j (j=1, 2, \dots, k_1; k_1$ 为旧三角形的个数), 新三角形的质量、面积和内能分别为 m^i, s^i 和 $E^i (i=1, 2, \dots, k_2; k_2$ 为新三角形的个数)。根据重叠系数的定义,则新三角形的质量和内能分别为

$$m^i = \sum_{j=1}^{k_1} C_j^i m_j \quad (26)$$

$$E^i = \sum_{j=1}^{k_1} C_j^i E_j \quad (27)$$

新三角形的密度为

$$\rho^i = m^i / s^i \quad (28)$$

求得新三角形的质量后,根据(2)式可以求得格点的新质量。同样地,根据动量守恒修正格点速度,根据能量守恒修正新三角形的内能。

(2) “短边融合”发生在不同介质中,如图 9 所示。

当“短边融合”发生在物质界面处时,为了保证不出现“混合网格”,采用如下策略进行物理量重映。

① 确定新三角形的物质类型,本研究中规定新三角形的物质类型与其对应的旧三角形物质类型一致。例如,新三角形 $\triangle ABC$ 应与旧三角形 $\triangle BCF$ 的物质类型一致,新三角形 $\triangle ACD$ 应与旧三角形 $\triangle CDF$ 的物质类型一致。

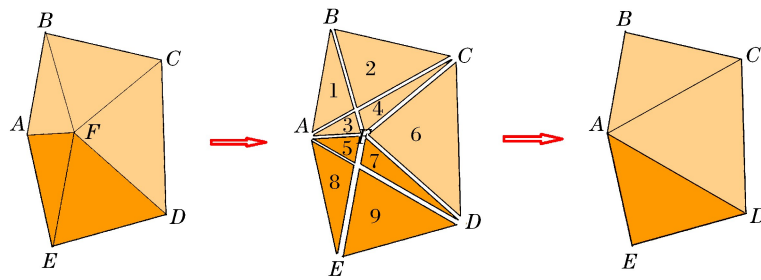


图 9 多物质界面处短边融合后物理量的重映过程

Fig. 9 Remapping after edge-merging on the interface

② 对质量和内能进行初步的重映

$$m^i = \sum_{\substack{j=1 \\ T_j = T_i}}^{k_1} C_j^i m_j \quad (29)$$

$$E^i = \sum_{\substack{j=1 \\ T_j = T_i}}^{k_1} C_j^i E_j \quad (30)$$

式中: T 表示物质类型。(29)式和(30)式对 j 的取值有限制,即:第 j 个旧三角形应与第 i 个新三角形的物质类型一致。例如在求新三角形 $\triangle ADC$ 的质量和内能时,只有旧三角形 $\triangle ABF$ 、 $\triangle BCF$ 、 $\triangle CDF$ 对 $\triangle ADC$ 有贡献,分别为图 9(b)中的 $\triangle_3$ 、 $\triangle_4$ 和 $\triangle_6$,而 $\triangle_5$ 和 $\triangle_7$ 则对新三角形 $\triangle ADC$ 没有贡献。

③ 为了保证物质守恒,在步骤②中,对(29)式和(30)式没有贡献的 $C_j^i m_j$ 和 $C_j^i E_j$ 将被转移到与第 j 个旧三角形对应的新三角形中。例如图 9(b)中的重叠部分 $\triangle_5$ 和 $\triangle_7$: $\triangle_7$ 将被转移到与旧三角形 $\triangle DEF$ 对应的新三角形 $\triangle ADE$ 中;而 $\triangle_5$ 因其所在的旧三角形会被删除,所以并没有对应的新三角形让其转移,本研究采取的策略是将其均分到周边包含相同介质的三角形中,即新三角形 $\triangle ADE$ 中。如果该三角形周边没有包含相同介质的三角形,则其物质将被丢弃。

④ 上述步骤完成后,则完成了质量和内能在多物质界面处的重新分配,根据(2)式得到格点的新质量。类似地,根据动量守恒修正格点速度,根据能量守恒修正新三角形的内能。从图 9 和上述处理过程

可以看到,对多介质界面处的网格进行“短边融合”相当于对边界做了一个平滑处理,原边界从 AFD 变为 AD ,如果 AF 长度足够小,则这种处理带来的人工误差就越小。

3.4 “帽子戏法”操作后的物理量守恒重映

如图6所示,“帽子戏法”实际上可以看作是“短边融合”和“长边劈裂”两种操作组合而成的,先对长边 AD 进行劈裂,再融合掉短边 FG 。本研究中假设 G 点是 AD 边的中点,且速度是 A 点与 D 点速度之和的一半,即

$$\begin{cases} \mathbf{x}_G = (\mathbf{x}_A + \mathbf{x}_D)/2 \\ \mathbf{v}_G = (\mathbf{v}_A + \mathbf{v}_D)/2 \end{cases} \quad (31)$$

因此,该方法的重映过程分为两个部分,即上半部分的“短边融合”后的重映和下半部分“长边劈裂”后的重映。因为“短边融合”发生在同种介质中,所以与3.3节中单一介质内的“短边融合”类似,需要先计算重叠系数,然后根据重叠系数计算新三角形的质量和内能。下半部分的重映过程较为简单,因为 G 点是 AD 边的中点,只需将 $\triangle ADE$ 的质量及内能均分到 $\triangle AEG$ 和 $\triangle DEG$ 中。得到三角形的质量和内能后,根据(2)式得到格点的新质量,然后利用动量守恒对格点的速度进行修正,利用能量守恒对三角形单元的内能进行修正。

4 测试算例

4.1 冲击波与气泡相互作用

该算例来自文献[4,11,13],几何尺寸如图10所示,中间区域填充氦气,其余部分填充空气。区域右边界是可移动活塞,以速度 $u^* = -124.824$ m/s 向左运动。氦气和空气都采用多方气体状态方程描述,初始条件分别为: $(\rho, p, e, \lambda)_{\text{Helium}} = (0.182, 10^5, 8.4792 \times 10^5, 1.648)$, $(\rho, p, e, \lambda)_{\text{Air}} = (1, 10^5, 2.5 \times 10^5, 1.4)$,其中 ρ, p, e 分别为密度、压力和比内能, λ 为多方气体指数,数值均采用 kg-m-s 单位制。模拟中网格数量为 350×89 ,黏性系数取为 0.0001。

图11是不同时刻 t 激波与气泡相互作用的模拟结果,其中左列是文献[11]中给出的压力云图与气泡边界线的模拟结果,右列是利用

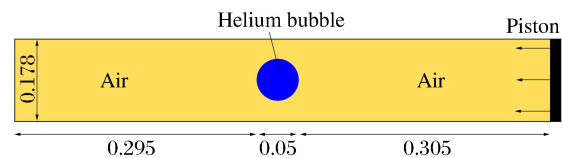


图10 激波与气泡相互作用

Fig. 10 Shock/bubble interaction

本研究方法模拟得到的结果。可见,二者符合较好,验证了本研究方法的准确性。

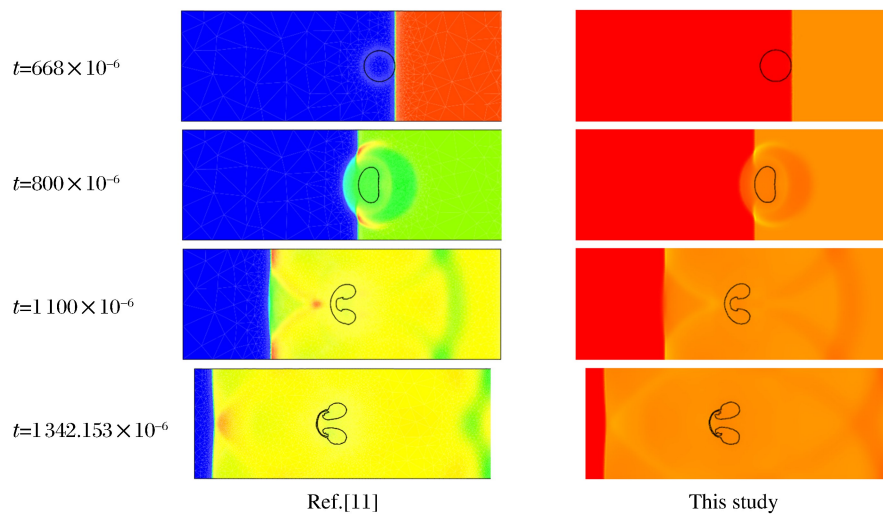


图11 本研究模拟结果与文献[11]的对比

Fig. 11 Comparison of simulation results between this study and Ref. [11]

图 12 给出了从激波开始作用于气泡到气泡即将离开原来位置的时间段内,本研究模拟结果与实验结果^[13]的对比,二者基本一致。图 13 给出了本研究、文献[11]模拟结果和实验结果^[13]在激波作用后期($t=1\,342.153\times 10^{-6}$ 时刻)的对比。可以看到,本研究结果与文献[11]结果一致,但与实验有一些差异,其原因可能是实验条件与计算模拟中假设的条件有一定差异,对此将在后续进行更仔细的研究。

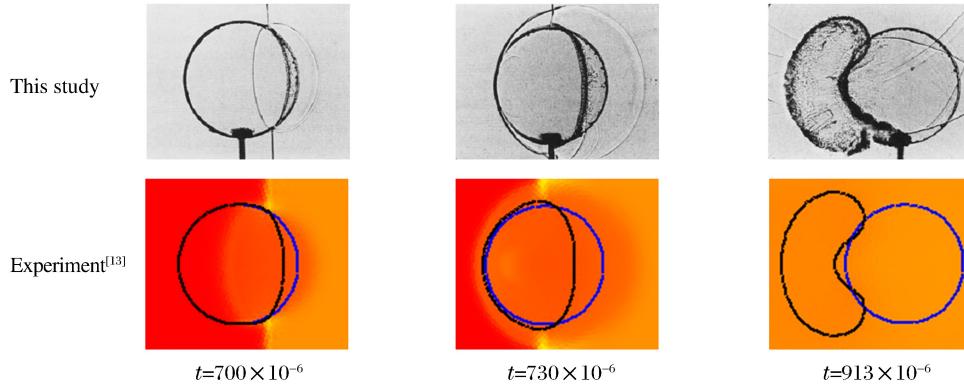


图 12 本研究模拟结果与实验^[13]的对比

Fig. 12 Comparison of simulations results of this study with experiment results^[13]

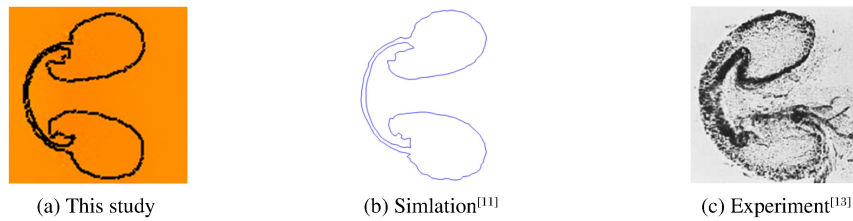


图 13 本研究模拟、文献[11]模拟以及实验^[13]结果在 $t=1\,342.153\times 10^{-6}$ 时刻的对比

Fig. 13 Comparison of simulation result of this study, simulation result of Ref. [11], and experiment result^[13] at $t=1\,342.153\times 10^{-6}$

4.2 R-T 不稳定性

该算例来自文献[4]。如图 14 所示,模型由两种不同密度的流体组成:上层为重流体,密度为 2;下层为轻流体,密度为 1。两种流体都采用理想气体状态方程描述,多方指数 $\lambda=1.4$ 。该模型区域大小为: $\Omega=[0,1/3]\times[0,1]$,界面处的曲线方程为: $y(x)=0.5+0.01\cos(6\pi x)$ 。初始时各点都处于静止状态,所受到的压力为

$$p_d(x,y)=1+\frac{1}{2}\rho_u g+\rho_d g\left(\frac{1}{2}-y\right) \quad (32)$$

$$p_u(x,y)=1+\rho_u g(1-y) \quad (33)$$

式中:下标“u”“d”分别代表重流体、轻流体; g 为重力加速度,此处取为 0.1。

对于 R-T 不稳定性的模拟,可以采用单介质和多介质两种方式。在单介质模拟中,上、下两层液体被当作一种介质的两种状态;在多介质模拟中,上、下两层液体被当作不同介质。两者的区别会带来网格动态重分的区别,即:在多介质模拟中,由于物质界面的存在,界面处的网格重分将采用前述的专门处理界面处网格的方法。R-T 不稳定发展过程中,随着“尖钉”和“气泡”的形成及卷曲,网格会出现极大的变形。该算例可以有效地测试本研究提出的网格局域动态重分方法改善单一介质内部及多介质界面处大变形网格的能力。

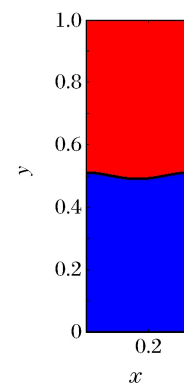


图 14 单模 R-T 不稳定性

Fig. 14 Single mode R-T instability

4.2.1 单介质的 R-T 不稳定性过程

首先针对单介质的 R-T 不稳定性进行模拟。采用 3 种不同的网格划分: 24×72 、 48×144 和 100×300 , 边界条件为周期边界, 黏性系数为 0.0001。图 15~图 17 是不同网格对应的密度云图。

根据 3 种网格模拟的单介质 R-T 不稳定性的演化过程, 可以得出以下结论。

(1) 本研究提出的动态局域重分方法可以有效地处理单介质内的大变形网格, 成功地模拟了 R-T 不稳定从线性阶段到非线性阶段再到湍流混合阶段的演化过程。这在没有采用网格动态局域重分的拉氏方法中很难模拟出来。

(2) 随着网格数目的增加, 该方法可以更精细地刻画流体的运动过程, 图 18 是 $t=6$ 时刻, 网格分别为 24×72 、 48×144 和 100×300 的模拟结果。从图 18 中可以看到, 密网格可以较为精细地捕捉到由流体的切向速度差异所引起的 K-H(Kelvin-Helmholtz)不稳定性。

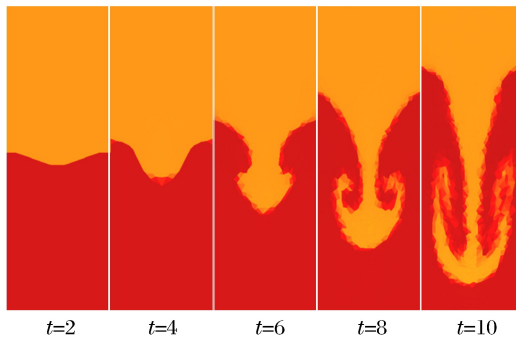


图 15 不同时刻 24×72 网格对应的密度云图(单介质)

Fig. 15 Density maps at different time on 24×72 grid (Single material)

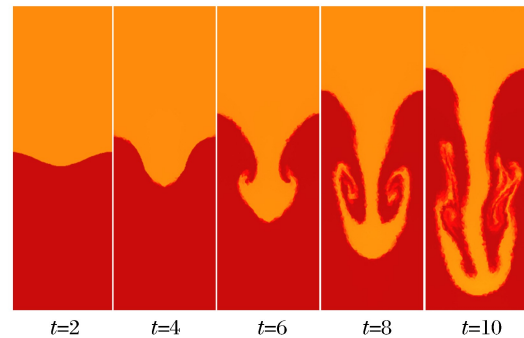


图 16 不同时刻 48×144 网格对应的密度云图(单介质)

Fig. 16 Density maps at different time on 48×144 grid (Single material)

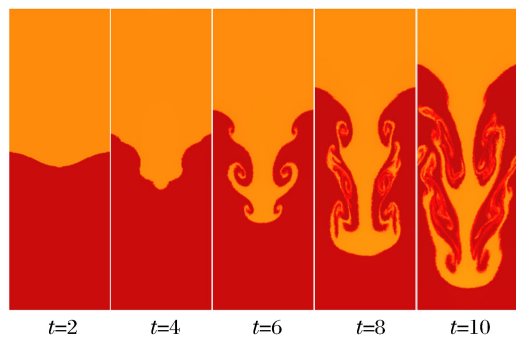


图 17 不同时刻 100×300 网格对应的密度云图(单介质)

Fig. 17 Density maps at different time on 100×300 grid (Single material)

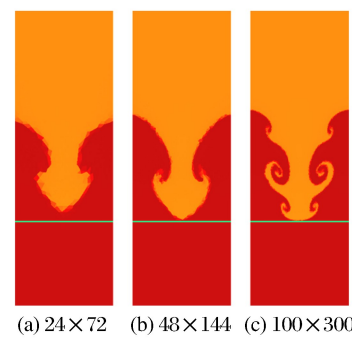


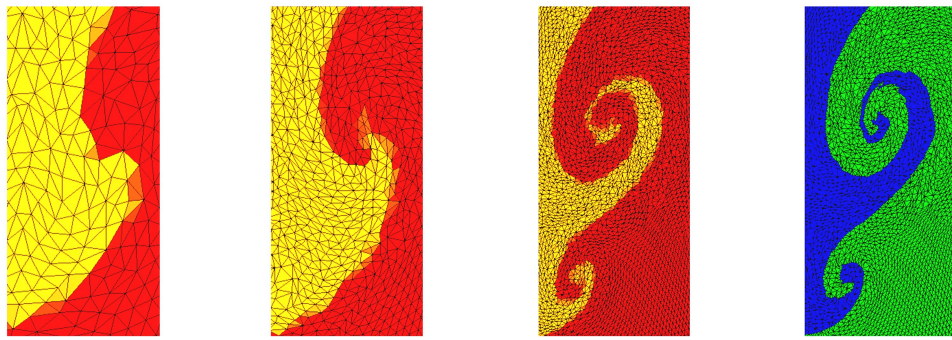
图 18 $t=6$ 时刻不同网格对应的流体结构

Fig. 18 Flow structures with 3 mesh grids at $t=6$

图 19(a)~图 19(c)给出了单介质模拟在尖钉附近的网格形貌, 此时的网格相比于初始网格, 其拓扑结构和单元数目都已经发生了改变。图 20 给出了初始网格为 100×300 时, 不同时刻网格重分操作的发生次数。图 21 是该模拟过程中相应的质量、动量及能量变化量 ($\Delta m/m$ 、 M_x/M_y 及 $\Delta E/E$), 可以看到质量没有发生变化, x 方向动量相对于 y 方向动量的变化极小, 并且能量的最大损失量只占总能量的 0.0011%, 可以忽略不计。

4.2.2 多介质的 R-T 不稳定过程

从多介质的角度模拟 R-T 不稳定性的演化过程, 以验证本研究提出的方法对界面处大变形网格处理的有效性。计算网格为 100×300 , 边界条件为周期边界, 黏性系数为 0.0001, 模拟结果如图 22 所示。



(a) Single material, 24×72 (b) Single material, 48×144 (c) Single material, 100×300 (d) Multi-material, 100×300

图 19 $t=6$ 时刻不同计算方式对应的网格

Fig. 19 Mesh of different simulations at $t=6$

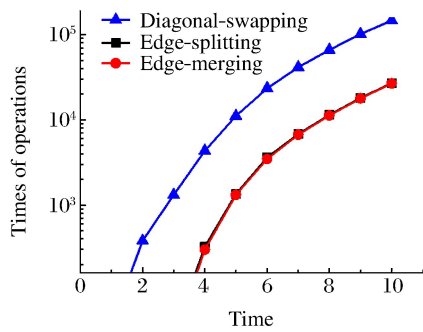


图 20 单介质模拟每个操作发生的次数

Fig. 20 Times of each operations in single material simulation

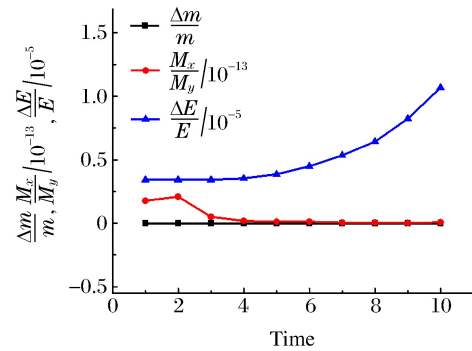


图 21 单介质模拟质量、动量及能量的改变量

Fig. 21 Variation of mass, momentum and energy in single material simulation

根据多介质 R-T 不稳定性的模拟结果,可以得出如下结论。

(1) 网格动态局域重分方法较成功地应用到多介质界面处,改善了多介质界面处的大变形网格。这为处理多介质界面处的大变形网格提供了一个新思路。

(2) 图 23 是 $t=6$ 时多介质 R-T 不稳定性与单介质 R-T 不稳定性在相同的尺寸下模拟结果的对比,总体形态一致,在界面处略有不同。一方面是由于在多介质模拟中,界面采用了更严格的网格重分

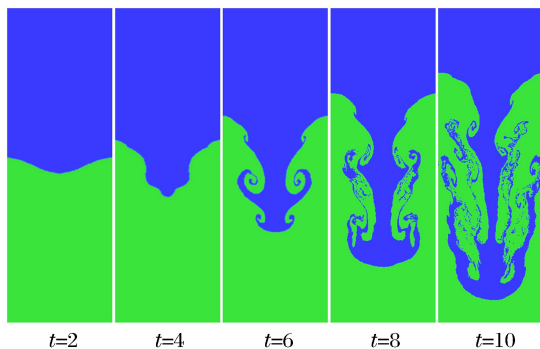


图 22 不同时刻 100×300 网格的密度云图(多介质)

Fig. 22 Material maps at different time on 100×300 grid (Multi-material)



图 23 相同网格下多介质(左)与单介质(右)R-T 不稳定性对比

Fig. 23 Comparison between multi-material (Left) and single material (Right) R-T instability on the same mesh

判据,使多介质界面处的网格重分与单介质内部相应位置的网格重分次数不同;另一方面是多介质处的重映方式不同。最终导致界面扰动的发展略有不同。

图 19(d) 给出了多介质 100×300 网格模拟过程中尖钉附近的网格形貌。图 24 是该模拟过程中,不同时刻网格重分操作的发生次数。图 25 是相应的质量、动量及能量变化,可以看出:在 $t=8$ 之前,能量误差与质量误差较小;在 $t=8$ 之后,误差开始明显增加。对应图 22 的发展过程可以看到, $t=8$ 之后,湍流开始充分发展,此时多物质界面处网格重分次数增多,物质丢失的可能性增大,因此质量和能量误差增加,这是由本研究采取的算法决定的。但是在 $t=8$ 之前,湍流尚未形成或者尚未充分发展,质量和能量误差最高达到 0.1% ,该误差仍然很小。因此本研究算法对于湍流尚未充分发展阶段的模拟仍具有指导意义,但是当湍流充分发展后,数值误差较大,不再具有明显的指导意义。

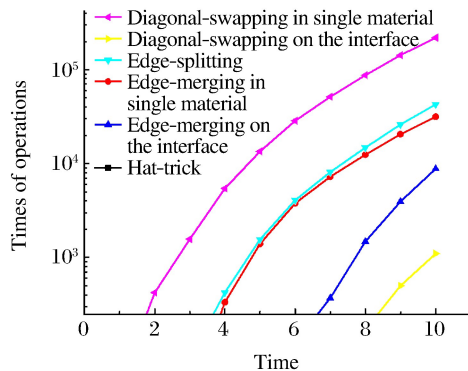


图 24 多介质模拟每个操作发生的次数

Fig. 24 Times of each operations in multi-material simulation

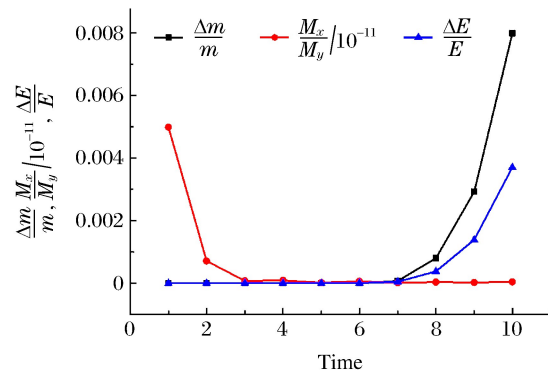


图 25 多介质模拟质量、动量和能量的改变量

Fig. 25 Variation of mass, momentum and energy in multi-material simulation

5 结 论

本研究提出的网格动态局域重分方法不仅可以处理单一介质内部的大变形网格,同时也为处理多介质界面处的大变形网格提供了一个有效的策略。该方法由 4 种基本网格操作组成,即“对角线交换”“长边劈裂”“短边融合”和“帽子戏法”,每种方法对应不同的发生条件和物理量重映策略。利用该方法对冲击波与气泡相互作用和 R-T 不稳定性的演化过程进行了数值模拟,取得了良好的模拟结果,其中 R-T 不稳定性模拟分单一介质和多介质两种情况。通过模拟结果可以看出,该重分方法能够有效地处理网格畸变问题,完整模拟出流体运动的过程。

参考文献:

- [1] HIRT C W, AMSDEN A A, COOK J L. An arbitrary Lagrangian-Eulerian computing method for all flow speeds [J]. Journal of Computational Physics, 1974, 14(3): 227-253.
- [2] ANBARLOOEI H R, MAZAHARI K. Moment of fluid interface reconstruction method in multi-material arbitrary Lagrangian Eulerian (MMALE) algorithms [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2009, 198(47): 3782-3794.
- [3] ZENG Q. MMALE numerical simulation for multi-material large deformation fluid flows [C]//Journal of Physics: Conference Series, 2014, 510: 012047.
- [4] LOUBRE R, MAIRE P H, SHASHKOV M J, et al. A reconnection-based arbitrary-Lagrangian-Eulerian method [J]. Journal of Computational Physics, 2010, 229(12): 4724-4761.

- [5] 田宝林,刘妍,申卫东,等.可压缩多介质流动的整体 ALE 方法(GALE) [J].北京理工大学学报,2010,30(5):622-625.
TIAN B L,LIU Y,SHEN W D,et al. Global arbitrary Lagrangian-Eulerian method for compressible multimaterial flows [J]. Transactions of Beijing Institute of Technology,2010,30(5):622-625.
- [6] BENSON D J. Volume of fluid interface reconstruction methods for multi-material problems [J]. Applied Mechanics Reviews,2002,55(2):151-165.
- [7] DYADECHKO V,SHASHKOV M. Reconstruction of multi-material interfaces from moment data [J]. Journal of Computational Physics,2008,227(11):5361-5384.
- [8] LIU J. A second-order changing-connectivity ALE scheme and its application to FSI with large convection of fluids and near contact of structures [J]. Journal of Computational Physics,2016,304:380-423.
- [9] WICKE M,RITCHIE D,KLINGNER B M,et al. Dynamic local remeshing for elastoplastic simulation [J]. ACM Transactions on Graphics,2010,29(4):1-11.
- [10] 王瑞利,林忠,魏兰. 针对流体大变形问题网格邻域可变技术 [J]. 计算物理,2011,28(4):501-506.
WANG R L,LIN Z,WEI L. Reconnection-based Lagrangian-local remeshing method for large deformations [J]. Chinese Journal of Computational Physics,2011,28(4):501-506.
- [11] STÉPHANE D P. Metric-based mesh adaptation for 2D Lagrangian compressible flows [J]. Journal of Computational Physics,2011,230(5):1793-1821.
- [12] BARLOW A J,MAIRE P H,RIDER W J,et al. Arbitrary Lagrangian-Eulerian methods for modeling high-speed compressible multimaterial flows [J]. Journal of Computational Physics,2016,322:603-665.
- [13] HAAS J F,STURTEVANT B. Interaction of weak shock waves with cylindrical and spherical gas inhomogeneities [J]. Journal of Fluid Mechanics,1987,181:41-76.

Simulation of Two-Dimensional Multi-Material Compressible Flows Using Lagrangian Methods

ZHAO Haibo,XIAO Bo,BAI Jinsong,DUAN Shuchao,
WANG Ganghua,KAN Mingxian,CHEN Fang

(*Institute of Fluid Physics,CAEP,Mianyang 621999,China*)

Abstract: When simulating the two-dimensional multi-material compressible flows using the Lagrangian method, the distortion of the mesh is often the reason why the process terminates. The dynamic local remeshing is an option to relax the distortion. In this study, we combined the “diagonal-swapping” “edge-splitting” “edge-merging” and “hat-trick” to deal with the distortive mesh. The 4 operations could act not only in single material, but also be extended to the multi-material interface to deal with the distortive mesh on the interface. After the remeshing, the quantities on the old mesh are projected onto the new one. During this process, the mass, momentum and energy are kept conservative. We verified the effectiveness and accuracy of this method by using it to simulate the shock/bubble interaction and the R-T instability. In the R-T instability simulation, the single material and the multi-material models are applied to prove that this method is able to deal with the distortive mesh both inside the material and on the interface.

Keywords: multi-material flow; large deformation motion; staggered grid; dynamic local remeshing; conservative remapping

液-液斜界面 R-T 失稳特征的实验研究^{*}

江荣宝¹, 黄熙龙², 邹立勇², 施红辉¹, 吴 鋈²

(1. 浙江理工大学机械与自动控制学院, 浙江 杭州 310000;

2. 中国工程物理研究院流体物理研究所冲击波物理与爆轰物理重点实验室, 四川绵阳 621999)

摘要: 实验研究了不同加速度下不相溶流体斜界面 Rayleigh-Taylor(R-T)不稳定性诱导湍流混合区的发展特征。利用高速阴影测试技术研究了硅油/碘化钾溶液界面 R-T 不稳定性诱导界面的演化规律, 定量分析了混合区发展宽度、界面倾角与时间的关系。通过实验结果分析得出: 水平界面与斜界面混合区宽度演化的差别主要体现在后期, 前、中期两者演化规律基本一致; 界面倾角的演化呈现出两种不同的趋势, 随时间先呈抛物线增长, 随后线性增长, 演化后期流体界面发生翻转; 由 R-T 不稳定性诱导的界面混合与 K-H 不稳定性诱导的界面混合呈相互竞争的关系。

关键词: Rayleigh-Taylor 不稳定性; 湍流混合; 阴影法; 斜界面

中图分类号: O357.5

文献标识码: A

当轻流体加速重流体或者在重力场中支撑重流体时, 流体界面将产生 Rayleigh-Taylor(R-T)不稳定性^[1]。R-T 不稳定性的演化及其诱导的湍流混合是一种复杂的非线性多尺度问题, 在惯性约束核聚变(Inertial Confinement Fusion, ICF)中靶丸的设计、内燃机燃油喷雾等技术领域有重要的应用价值。此外, R-T 不稳定性对超新星爆发、地球物理学中地下盐丘及火山岛的形成起着重要作用。因此, R-T 不稳定性问题得到众多学者广泛的关注^[2-5]。

Rayleigh^[6]首次研究了 R-T 不稳定性的发展, 分析了重力场中密度不均匀流体的稳定性, 获得了增长率与波数的特征关系。Read^[7]通过实验研究竖直加速箱体两种流体 R-T 不稳定的演化, 发现了扰动振幅 h_i 与演化时间 t 的关系

$$h_i = \alpha_i A g t^2 \quad (1)$$

式中: α_i 是尖钉或气泡的增长系数; A 是无量纲参数 Atwood 数, $A = (\rho_2 - \rho_1) / (\rho_2 + \rho_1)$, ρ_1, ρ_2 为轻、重流体的密度; g 是恒定加速度。而对于非恒定加速度, 用箱体位移 Z 代替 gt^2

$$Z = \iint g(t) dt' dt \quad (2)$$

式中: $g(t)$ 为非恒定加速度。

Dimonte 等^[8]利用直线电机(Liner Electric Motor, LEM)实验研究了复杂加速度下不同密度比流体 R-T 不稳定性的发展过程, 得出对于非恒定加速度且满足 $Ag > 0$, 扰动振幅

$$h_i = 2\alpha_i AS \quad (3)$$

其中

$$S = \frac{1}{2} \left[\int \sqrt{g} dt \right]^2 \quad (4)$$

^{*} 收稿日期: 2018-01-31; 修回日期: 2018-03-28

基金项目: 国家自然科学基金(11472253, 11672277, 11602247); 科学挑战专题(TZ2016001)

作者简介: 江荣宝(1993—), 男, 硕士研究生, 主要从事界面不稳定性的实验研究. E-mail: 18367053723@163.com

通信作者: 黄熙龙(1988—), 男, 硕士, 助理研究员, 主要从事界面不稳定性研究. E-mail: xlhuang@caep.cn

随后 Dimonte 等^[9]利用直线电机研究了流体在连续不同阶段的加速度(加速-减速-加速)下的界面失稳发展特征,结果表明:流体在第一次 R-T 不稳定性阶段(加速阶段),扰动振幅随时间二次增长;在 R-T 稳定阶段(减速阶段),由于流体发生翻转,扰动振幅降低。Waddell 等^[10]利用重物 and 滑轮组系统作为驱动手段实验研究了低 Atwood 数下具有单模初始扰动的界面 R-T 不稳定性的演化,发现初期扰动振幅的增长规律与线性稳定理论推导结果较为吻合。Holford 等^[11]利用挡板实验研究了重力场中流体斜界面 R-T 不稳定性的影响,但他们主要研究倾斜角度对流体混合效率的影响。McFarland 等^[12-13]实验研究了激波作用下 Air/He-SF₆ 斜界面 Richtmyer-Meshkov(R-M)不稳定性受初始扰动的影响,定量研究了混合区宽度增长规律,发现在不同初始界面倾角(30°~60°)下,混合区宽度都随着无量纲时间线性增长。Dimonte 等^[14]采用不同的数值方法二维或三维数值模拟了小扰动波长下流体界面 R-T 不稳定性诱导的混合区发展,发现只有气泡直径及增长宽度与实验结果较为吻合。国内黄文斌等^[15]利用果冻实验技术研究了气-液界面 R-T 不稳定性,分析了不同波长扰动对混合区内部结构特征的影响规律。施红辉等^[16]利用激波管实验研究了气-液界面 R-T 不稳定性演化过程。刘金宏等^[17]利用竖直激波管高压气体驱动箱体实验研究了一定倾角下混合区的不对称性特征。综上所述,国内外对 R-T 不稳定性进行了大量详尽的实验及数值模拟研究,但主要集中在水平界面,实际工程应用中界面更加复杂,加速度与密度梯度不总是共线的,如 ICF 中,由于加工工艺的因素靶丸并不严格呈球状,造成密度的不均匀性,此时烧蚀面与加速度处于不共线的状态,而加速度与密度梯度不共线会伴随 K-H 不稳定性的产生,使 R-T 失稳演化更加复杂。因此研究此类问题不仅在靶丸的设计等物理应用上有重要价值,更有助于提升对界面不稳定物理机制的认识。

本研究基于改造后的激波管,采用高压气体膨胀驱动箱体,箱体内盛有不相溶的两种流体,在重力作用下形成具有自然随机扰动的初始界面。实验中,将实验管道倾斜一定角度形成斜界面,研究界面加速后的 R-T 不稳定性发展过程,利用阴影测试技术获得不同加速度下初始倾角分别为 0°和 5°时斜界面的演化规律。

1 实验方法

1.1 实验装置

图 1 为实验装置示意图,其中:A 为高压驱动段,B 为活塞运动段,C 为隔离 A 与 B 的膜片,D 为在实验管道运动的活塞,E 为活塞与箱体的连接杆,F 为存放实验液体的箱体,G 为缓冲垫。实验时,往 A 中充入一定压力的气体,鼓起的膜片 C 与预先布置的电热丝贴在一起,电热丝通电后,膜片沿着电热丝的方向破开,气体膨胀驱动活塞及箱体向下运动。箱体上端安装加速度传感器,将加速度信号传送至示波器,示波器将延时信号传至高速相机实现同步拍摄。当加速度方向与流体界面上的密度梯度方向不共线时,称界面为斜界面。实验中,将装置倾斜至一定角度,加速度方向与流体界面具有一定夹角,形成初始斜界面。重力加速度 g_0 与箱体加速度 a 的夹角为流体界面初始倾角 γ_0 。表 1 为实验的工况,包括初始界面厚度、初始界面倾角及高压段初始压力。箱体空腔尺寸为 60 mm(长)×30 mm(宽)×120 mm(高),即箱体容积 $V=216$ mL,轻、重流体各占一半。采用的轻流体为硅油(密度 0.917 g/mL,折射率 1.389,黏度 11.1 mPa·s),重流体为碘化钾溶液(密度 1.289 g/mL,折射率 1.389,黏度 1.27 mPa·s),轻/重流体界面的 Atwood 数为 0.169。实验在常温(25℃)、标准大气压下完成。

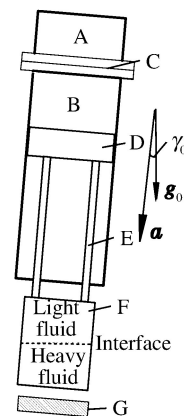


图 1 实验装置示意

Fig.1 Schematic of experimental apparatus

表 1 实验参数
Table 1 Experimental parameters

Case	Atwood number	Initial interfacial thickness/mm	$\gamma_0/(^{\circ})$	Initial pressure at high pressure section/MPa
1	0.169	0.721	0	0.25
2	0.169	0.752	5	0.25
3	0.169	0.734	0	0.40
4	0.169	0.761	5	0.40

1.2 测试方法

流体的折射率与其密度相关,可以用阴影法测试流体折射率的变化。实验流体在加速过程中,由 R-T 不稳定性诱导的湍流混合区有较大的密度变化,阴影法能对混合区宽度及特征结构进行清晰的显示。图 2 为反射式阴影法示意图,点光源光线经球面反射镜 M1 后得到一束均匀的平行光,平行光经过实验测试窗口,由球面反射镜 M2 产生汇聚光路,高速相机在焦点后适当位置记录成像信息。本实验高速相机幅频为 3 000 幅/秒,曝光时间为 1 μ s。相比于直接拍照,阴影法采用的平行光避免了因俯仰角产生的测量误差,保证了实验数据的准确性。

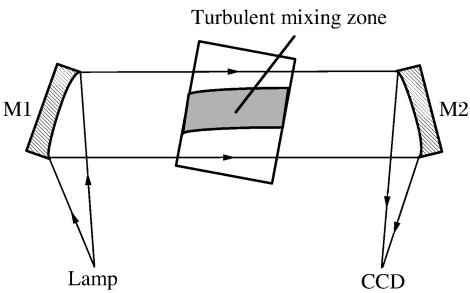


图 2 阴影法示意
Fig. 2 Schematic of shadowgraph

2 实验结果与分析

当高压气体推动箱体运动时,轻流体向重流体加速。由于惯性力的作用,轻流体“下沉”渗透重流体中形成“气泡”,重流体“上浮”混入轻流体中形成“尖钉”。这些结构具有较大的密度梯度,在测试图像中均显示为阴影区域。在该区域中,“尖钉”与“气泡”之间的流体混合区称为湍流混合区。混合区宽度反映了由 R-T 不稳定性诱导的湍流混合的范围和强度。测得的加速度信号数据经平滑处理后如图 3 所示,可知界面加速度在破膜后瞬间达到最大加速度,由于气体驱动力降低及存在管道摩擦力,加速度衰减至零后又反向增大。图 3 中加速度正向为重力加速度的方向。在加速度从最大值衰减到零时,加速度在界面法向的分量与密度梯度反向,此时界面是 R-T 不稳定的;而当箱体加速度进入负增长阶段(加速度方向与重力加速度方向相反)时,加速度在界面法向的分量与密度梯度同向,此时界面是 R-T 稳定的。本实验结果的时间范围处于从零时刻到箱体第一次撞击缓冲垫之间。

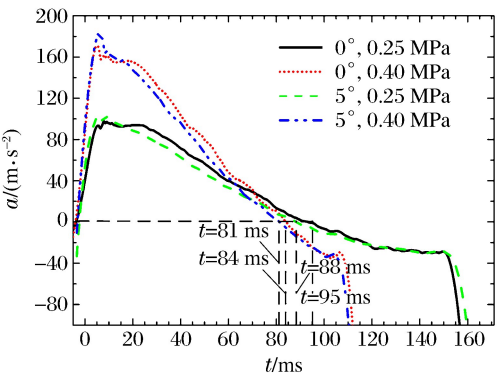


图 3 加速度曲线
Fig. 3 Acceleration curves

图 4 是高压段初始压力为 0.25 MPa 时,水平界面及斜界面(5°)的混合区发展阴影图。在图 4(a)中,随着时间的推移,流体界面处产生“气泡”和“尖钉”,且在前、中期“气泡”和“尖钉”结构的体积逐渐增大,数量逐渐增多,混合区宽度增大。后期界面处“尖钉”和“气泡”的体积达到最大值,但两种结构的数

量减少,其原因是“尖钉”和“气泡”在混合区发展后期进行合并形成体积更大的结构,与文献[10]中提到的“气泡合并理论”相吻合。由于箱体壁面的约束,流体在壁面处生成壁面涡旋,且壁面涡旋随着时间的增长逐渐增大。

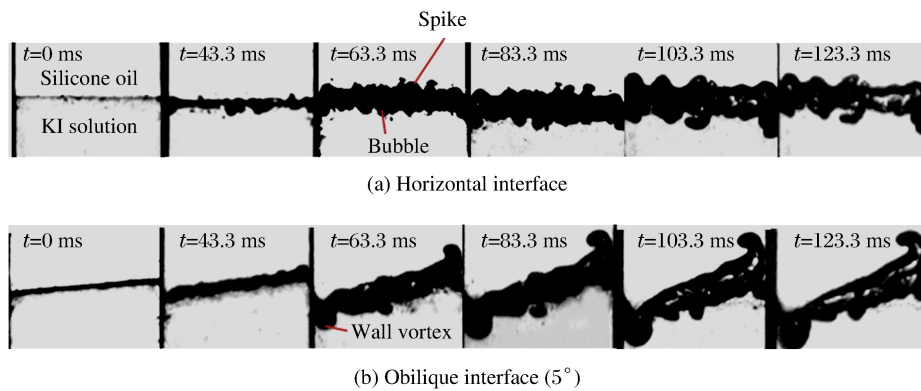


图4 高压段初始压力为 0.25 MPa 时界面湍流混合区发展阴影图

Fig. 4 Evolution of turbulent mixing zone when the initial pressure of the high pressure section is 0.25 MPa

当界面倾斜时,如图 4(b)所示,流体界面倾角随着时间的发展逐渐增大,界面呈翻转趋势。对比图 4(a)发现,同一时刻,壁面涡更加明显,且斜界面处形成的“气泡”和“尖钉”的体积及数量较小,界面更平滑。这是由于加速度方向与流体界面不共线,根据力的合成原理,可将加速度 a 分解为垂直于流体界面的分量 a_{R-T} 和平行于流体界面的分量 a_{K-H} (见图 5),其中: a_{R-T} 诱导界面 R-T 不稳定性的产生; a_{K-H} 导致流体切向流动,使界面更平滑。同时, a_{K-H} 导致流体界面存在速度差从而诱导 Kelvin-Helmholtz(K-H)不稳定性。R-T 不稳定性与 K-H 不稳定性的耦合作用使流体界面混合区内部结构更复杂。

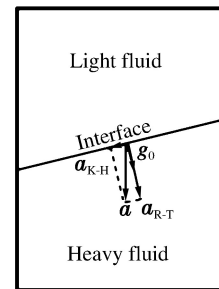


图5 界面加速度分解

Fig. 5 Acceleration decomposed at the interface

图 6 为高压段初始压力为 0.40 MPa 时,水平界面及斜界面(5°)的混合区发展阴影图。对比图 4(a)与图 6(a)可知:当高压段初始压力增大时,水平界面上“气泡”和“尖钉”的数量增加,混合区结构发展更剧烈;同一时刻,混合区宽度随着高压段初始压力的增大而增大,壁面涡尺寸随着加速度的增大而增大。对比图 4(b)与图 6(b)可知,斜界面、高压段初始压力

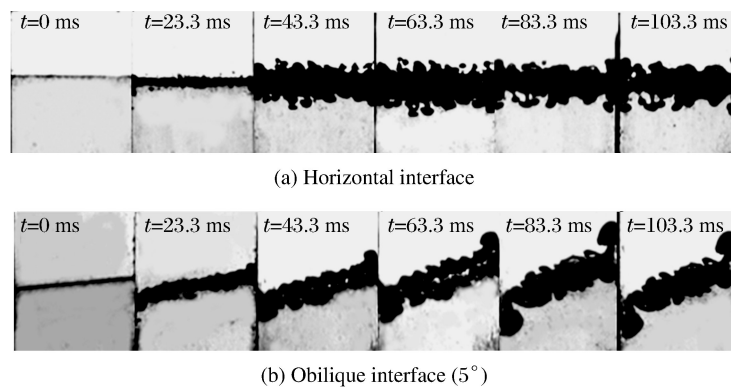


图6 高压段初始压力为 0.40 MPa 时界面湍流混合发展阴影图

Fig. 6 Evolution of turbulent mixing zone when the initial pressure of the high pressure section is 0.40 MPa

为 0.40 MPa 时的混合区结构比水平界面、初始压力为 0.25 MPa 时的更加明显。这是因为加速度垂直于界面的分量 a_{R-T} 变大,由 a_{R-T} 引发 R-T 不稳定性诱导的混合区结构尺寸更大;同时 a_{K-H} 增大会导致流体界面切向流动增大,产生涡,流体结构发生改变。发展后期,图 4(b)较图 6(b)混合区内尖钉数量减少。这是因为初始加速度降低,界面处 a_{R-T} 降低,界面倾角随着演化时间逐渐增大,界面加速度在垂直界面上的分量 a_{R-T} 变得更小, a_{K-H} 衰减较为缓慢,此时 K-H 不稳定性在诱导界面混合中占主导地位。

为了定量地对比高压段初始压力与初始倾斜角对混合区宽度演化的影响,将最大“尖钉”与最大“气泡”切线的垂直距离定义为混合区的宽度 W ,水平线与斜界面的夹角定义为斜界面倾角 γ ^[18],如图 7 所示。图 8 为混合区宽度 W 随时间的演化图,可以看出,在 0~20 ms 之间,4 种工况下混合区宽度增长缓慢,增长曲线基本重合。当高压段初始压力为 0.25 MPa 时,在 20~80 ms 之间混合区宽度进入快速增长阶段;但当高压段初始压力为 0.40 MPa 时,混合区宽度在 20~70 ms 内进入快速增长阶段,混合区宽度进入后期缓慢增长的时刻提前约 10 ms。混合区增长速率随着加速度的增大而增大,同一时刻混合区宽度随着加速度的增大而增大。后期湍流混合区宽度增长速率降低,是由于界面所受到的加速度的衰减导致的。同时因为加速度呈负增长,此时流体加速度在界面法向的分量 a_{R-T} 与密度梯度同向,界面是 R-T 稳定的,混合区内部“尖钉”和“气泡”结构不再发展,混合区宽度增长速率降低。

对比可知,初始界面倾角对混合区宽度发展的影响主要体现在后期。水平界面混合区宽度最大值大于斜界面混合区宽度最大值。这一方面是因为界面倾斜时,随着时间的发展,界面倾角逐渐增大,加速度在界面切向上的分量 a_{K-H} 增大,降低了在密度梯度方向混合的能量,导致混合区增长速率变小。另一方面可能因为由 R-T 不稳定性诱导的界面混合与 K-H 不稳定性诱导的界面混合呈相互竞争关系,二者的耦合作用限制了最大“气泡”及“尖钉”的发展。

图 9 所示为斜界面倾角 γ 随时间的演化及其拟合曲线。从图 9 中可发现,斜界面倾角为 5° 时,两种高压段初始压力下界面倾角的变化趋势相同,且初始压力较大时,同一时刻斜界面倾角的增长率较高。高压段初始压力为 0.25 MPa 时:在 0~83 ms 之间,界面倾角随时间近似呈抛物线增长;随后界面倾角随时间线性增长,拟合方程为 $\gamma = 2.87 + 0.188t$ 。高压段初始压力为 0.40 MPa 时:在 0~76 ms 之间,界面倾角也随时间近似呈抛物线增长;随后呈线性增长,拟合方程为 $\gamma = -5.525 + 0.365t$ 。这两个时

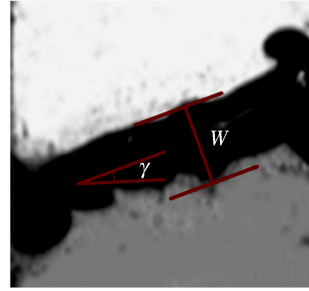


图 7 斜界面混合区参数定义

Fig. 7 Parameter definition of mixing zone in oblique interface

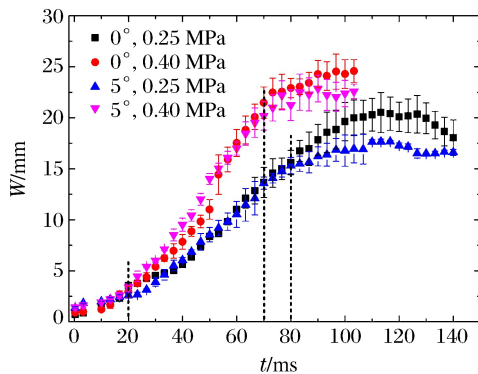


图 8 混合区宽度 W 随时间的演化

Fig. 8 Evolution of width of turbulent mixing zone over time

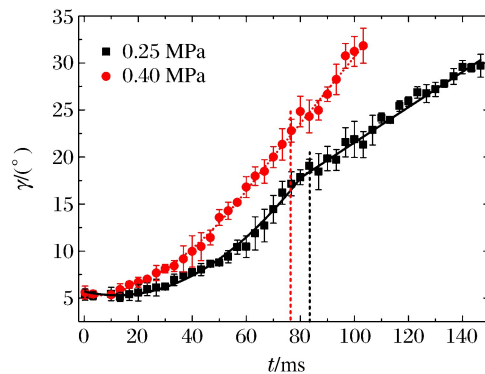


图 9 界面倾角 γ 随时间的演化

Fig. 9 Evolution of obliquity of turbulent mixing zone over time

间点对应着加速度从最大值衰减到零过程中的时刻,即界面处于 R-T 不稳定阶段。当高压段初始压力由 0.25 MPa 提高到 0.40 MPa 时,界面倾角在线性增长阶段的斜率增加了约 1 倍。结合图 8 可知:混合区宽度随时间线性增长时,混合区界面倾角随时间近似呈抛物线增长;但当后期混合区宽度不再增长时,混合区界面倾角却随着时间不断增长,且增长趋势近似线性。

3 结 论

采用高压气体驱动箱体的方式实验研究了两种不同初始倾角界面在不同加速度下的 R-T 不稳定性。利用阴影法获得了液-液斜界面 R-T 不稳定性诱导的界面失稳和混合的演化特征,分析了湍流混合区宽度及界面倾角随时间的定量关系。实验结果发现:加速度越大,混合区宽度增长率及界面倾角增长率越高;倾角效应在后期影响着混合区宽度的发展;混合区宽度不再增长时,其界面倾角一直增加,界面呈翻转趋势。阴影法可以清晰地显示混合区的外部特征,但对混合区内部的涡结构演化无能为力,后续工作将采用 PIV-PLIF 同步测量技术对混合区速度分布及密度分布进行测试,并将对由 R-T 不稳定性性和 K-H 不稳定性诱导的湍流混合的耦合效应进行更深入的分析。

参考文献:

- [1] SHARP D H. An overview of Rayleigh-Taylor instability [J]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1984, 12(1): 3-18.
- [2] ANDRONOV V A, BAKHRAKH S M, MOKOHOV V N, et al. Effect of turbulent mixing on the compression of laser targets [J]. *JETP Letters*, 1979, 29(1): 56-59.
- [3] ALON U, HECHT J, OFER D, et al. Power laws and similarity of Rayleigh-Taylor and Richtmyer-Meshkov mixing fronts at all density ratios [J]. *Physical Review Letters*, 1995, 74(4): 534-536.
- [4] DIMONTE G. Nonlinear evolution of the Rayleigh-Taylor and Richtmyer-Meshkov instabilities [J]. *Physics of Plasmas*, 1999, 6(5): 2009-2015.
- [5] ATZENI S, MEYER-TER-VEHN J. 惯性聚变物理 [M]. 沈百飞, 译. 北京: 科学出版社, 2008: 198-253.
ATZENI S, MEYER-TER-VEHN J. The physics of inertial fusion [M]. Translated by SHEN B F. Beijing: Science Press, 2008: 198-253.
- [6] RAYLEIGH L. Investigation of the character of the equilibrium of an incompressible heavy fluid of variable density [J]. *Proceeding of the London Mathematical Society*, 2009, 14(1): 200-207.
- [7] READ K I. Experiment investigation of turbulent mixing by Rayleigh-Taylor instability [J]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1984, 12(1): 45-58.
- [8] DIMONTE G, SCHNEIDER M. Density ratio dependence of Rayleigh-Taylor mixing for sustained and impulsive acceleration histories [J]. *Physics of Fluids*, 2000, 12(2): 304-321.
- [9] DIMONTE G, RAMAPRABHU P, ANDREWS M. Rayleigh-Taylor instability with complex acceleration history [J]. *Physical Review E*, 2007, 76(4): 1-6.
- [10] WADDELL J T, NIEDERHAUS C E, JACOBS J W. Experimental study of the Rayleigh-Taylor instability: low atwood number liquid system with single-mode initial perturbations [J]. *Physics of Fluids*, 2001, 13(5): 1263-1273.
- [11] HOLFORD J M, DALZIEL S B, YOUNGS D. Rayleigh-Taylor instability at a tilted interface in a laboratory experiments and numerical simulations [J]. *Laser and Particle Beams*, 2003, 21(4): 419-423.
- [12] MCFARLAND J A, GREENOUGH J A, RANJAN D. Investigation of the initial perturbation amplitude for the inclined interface Richtmyer-Meshkov instability [J]. *Physica Scripta*, 2013, 155(21): 14-20.
- [13] MCFARLAND J A, REILLY D, CREEL S, et al. Experimental investigation of the inclined interface Richtmyer-Meshkov instability before and after reshock [J]. *Experiments in Fluids*, 2014, 55(3): 16-40.
- [14] DIMONTE G, YOUNGS D L, DIMITS A. A comparative study of the turbulent Rayleigh-Taylor instability using high-resolution three-dimensional numerical simulations: the alpha-group collaboration [J]. *Physics of Fluids*,

- 2004,16(5):1668-1693.
- [15] 黄文斌,邹立勇,刘金宏,等. 初始扰动对于气液界面 Rayleigh-Taylor 不稳定性发展的影响 [J]. 实验流体力学, 2010,24(3):39-41.
- HUANG W B,ZOU L Y,LIU J H,et al. Effects of initial perturbations on Rayleigh-Taylor instability growth at gas liquid interface [J]. Journal of Experiments in Fluid Mechanics,2010,24(3):39-41.
- [16] 施红辉,卓启威. Richtmyer-Meshkov 不稳定性流体混合区发展的实验研究 [J]. 力学学报,2007,39(3):417-421.
- SHI H H,ZHUO Q W. Evolution of the fluid mixing zone in Richtmyer-Meshkov instability at a gas/liquid interface [J]. Chinese Journal of the Theoretical and Applied Mechanics,2007,39(3):417-421.
- [17] 刘金宏,谭多望,张旭,等. 斜界面 Rayleigh-Taylor 不稳定性混合实验研究 [J]. 高压物理学报,2012,26(6):688-690.
- LIU J H,TAN D W,ZHANG X,et al. Experimental investigation of mixing at tilted interface induced by Rayleigh-Taylor instability [J]. Chinese Journal of High Pressure Physics,2012,26(6):688-690.
- [18] YOUNGS D L. Experimental investigation of turbulent mixing by Rayleigh-Taylor instability [J]. Physica D:Non-linear Phenomena,1991,3(12):586-589.

Experimental Investigation on the Characteristics of Unstability at Liquid-Liquid Tilted Interface Induced by Rayleigh-Taylor Instability

JIANG Rongbao¹, HUANG Xilong², ZOU Liyong², SHI Honghui¹, WU Jun²

(1. Faculty of Mechanical Engineering & Automation, Zhejiang Sci-Tech University,
Hangzhou 310000, China;

2. National Key Laboratory of Shock Wave and Detonation Physics,
Institute of Physics, CAEP, Mianyang 621999, China)

Abstract: In this research, we experimentally investigated the characteristics of the turbulent mixing zone induced by Rayleigh-Taylor (R-T) instability under different accelerations. We used the high-speed shadowgraph to study the evolution of the interface composed with the silicone oil/potassium iodide solution, and analyzed the width of the mixing zone and the obliquity of the interface quantitatively. According to the experimental results, the difference in the evolution of width between horizontal interface and oblique interface exhibits mainly in late stage, and the evolution law is basically same with that in the early and middle stages. There are two different trends in the evolution of the interfacial obliquity. The interfacial obliquity increases with time parabolically at first, and then increases linearly. As a result, the fluid interface turns over in the later stage of evolution. There is a competitive relationship between the turbulent mixing induced by R-T instability and K-H instability respectively.

Keywords: Rayleigh-Taylor instability; turbulent mixing; shadowgraph method; tilted interface



《高压物理学报》2018 年主题专刊名录

- ❖ 氢
- ❖ 高压物性实验研究
- ❖ 高压物性第一性原理计算
- ❖ 高压合成新材料
- ❖ 高压地球科学
- ❖ 静高压实验技术
- ❖ 动高压实验技术
- ❖ SHPB 实验技术
- ❖ 高压下材料和结构的力学性能和动态响应
- ❖ 界面不稳定性
- ❖ 高压科学应用——炸药起爆及安全性
- ❖ 高压科学应用——水下爆炸
- ❖ 高压科学应用——侵彻与防护
- ❖ 高压科学应用——破片
- ❖ 高压科学应用——爆燃及燃烧
- ❖ 高压科学应用——高压食品科学

★ 获取地址：<http://www.gywlxb.cn/topics>

2018 年“界面不稳定性”主题专刊论文引用信息

- ☆ 肖佳欣, 柏劲松, 王涛. 密度非均匀流场中冲击加载双模态界面失稳现象的数值模拟 [J]. 高压物理学报, 2018, 32(1): 012301.

XIAO J X, BAI J S, WANG T. Numerical study of shock wave impacting on the double-mode interface in nonuniform Flows [J]. Chinese Journal of High Pressure Physics, 2018, 32(1): 012301.

- ☆ 王涛, 柏劲松, 曹仁义, 等. 爆轰驱动铝飞层扰动增长的数值模拟 [J]. 高压物理学报, 2018, 32(3): 032301.

WANG T, BAI J S, CAO R Y, et al. Numerical investigations of perturbation growth in aluminum flyer driven by explosion [J]. Chinese Journal of High Pressure Physics, 2018, 32(3): 032301.

- ☆ 徐维铮, 吴卫国. 一种提高极值点处精度的三阶 WENO-Z 改进格式及应用 [J]. 高压物理学报, 2018, 32(3): 032302.

XU W Z, WU W G. An Improved third-order WENO-Z scheme for achieving optimal order near critical points and its application [J]. Chinese Journal of High Pressure Physics, 2018, 32(3): 032302.

- ☆ 赵海波, 肖波, 柏劲松, 等. 拉氏方法模拟二维多介质可压缩流体的运动 [J]. 高压物理学报, 2018, 32(4): 042303.

ZHAO H B, XIAO B, BAI J S, et al. Simulation of two-dimensional multi-material compressible flows using Lagrangian methods [J]. Chinese Journal of High Pressure Physics, 2018, 32(4): 042303.

- ☆ 江荣宝, 黄熙龙, 邹立勇, 等. 液-液斜界面 R-T 失稳特征的实验研究 [J]. 高压物理学报, 2018, 32(5): 054201.

JIANG R B, HUANG X L, ZOU L Y, et al. Experimental investigation on the characteristics of instability at liquid-liquid tilted interface induced by Rayleigh-Taylor instability [J]. Chinese Journal of High Pressure Physics, 2018, 32(5): 054201.

征 稿 简 则

《高压物理学报》是我国高压物理领域唯一的专业性学术刊物。征稿内容包括：动态及静态高压技术，人工合成新材料，高温高压下材料的力、热、光、电、磁等特性以及物质微观结构的研究，动态及静态高压研究中的测试技术，高温高压下的相变，高温高压物态方程，高压地学，材料动态断裂，冲击和爆轰现象等。《高压物理学报》接受中、英文稿件。

自1987年创刊以来，《高压物理学报》取得了较大成就。2001年，《高压物理学报》被科技部和国家新闻出版总署评为“中国期刊方阵”双效期刊。国际主要检索系统Scopus、JSTChina、CA长期收录《高压物理学报》发表的文章。由北京高校图书馆期刊工作研究会和北京大学图书馆编著的《中文核心期刊要目总览》连续七版把《高压物理学报》列为物理学类核心期刊。

《高压物理学报》一贯秉承服务科学、服务读者、服务作者的办刊理念，慎重对待每一篇来稿，尊重作者劳动。优秀稿件享有快速发表通道，重大创新性成果可在1个月甚至更短时间内刊出。欢迎广大专家学者向《高压物理学报》投稿！



官方网站：www.gywlxb.cn

官方邮箱：gaoya@caep.cn

联系电话：0816-2490042