第5卷 第1期 高压物理学报 Vol.5, No.1
1991年3月 CHINESE JOURNAL OF HIGH PRESSURE PHYSICS Mar., 1991

长时相干效应与分形布朗运动

王克钢 龙期威
(中国科学院金属研究所)
(中国科学院国际材料物理中心)

摘要 我们研究了阻尼布朗粒子，在具有幂律长时相干 $C(t)\sim t^{-\beta}$ ($0<\beta<1$, $1<\beta<2$) 的无规涨落力作用下的运动情况。我们发现它是作分形布朗运动，而不是作普通的布朗运动，而且，找出了分形布朗运动的有效 Fokker-Planck 方程，以及相应的精确解。于是第一次把长时相干效应和分形布朗运动建立了定量的联系。

关键词 分形 布朗及分形布朗运动 扩散 Fokker-Planck 方程

一、前 言

众所周知，自 R. Brown [1] 第一个观测到悬浮在液体中的花粉作无规运动以来，Brownian 运动已成为物理学，尤其是非平衡统计物理中的一个最基本的问题 [2]。

Mandelbrot [3] 于1968年首先从数学上引进了分形布朗运动 (fractional Brownian motion) 的概念，从而把普通的布朗运动扩充到分形布朗运动。但他并没有从物理上去研究分形布朗运动产生的物理基础，即分形布朗运动产生的物理基础与普通布朗运动的物理基础之间差别何在？或者说，布朗粒子在什么情况下作普通布朗运动，而在什么条件下作分形布朗运动？

近年来，人们对分形布朗运动的研究产生了浓厚的兴趣，但大部分工作是集中在计算分形 Brownian 运动的轨迹及轨道的分形维数，以及探讨分形布朗运动的自仿射性 [3]。据我们所知，仍没有工作涉及到系统研究产生分形布朗运动的物理基础。本文的目的是想结合分形几何和非平衡统计物理来研究产生分形布朗运动的物理基础及其应用。为了回答上面提出的问题，我们首先推导出布朗运动的有效 Fokker-Planck 方程。用广义的涨落耗散第二定理及 Einstein 关系来计有效的扩散系数，最后把无规涨落力的长时相干效应和分形布朗运动及反常扩散联系起来了。

二、分形布朗运动的 Fokker-Planck 方程

当布朗粒子在流体中运动时，周围介质对它的作用，可以分成两部分：第一部分是摩擦阻力，第二部分是由于分子无规碰撞所引起的无规涨落随机力。如果布朗粒子的质量远大于介质粒子的质量时，即流体密度比较低的情况下，随机力的平均值为零，而它的相干函数 $C(t)=\langle F(0)F(t)\rangle$ 近似为 δ 函数 [2]，此时布朗粒子的运动是普通的布朗运动。

但是，当布朗粒子在比较稠的流体中 [4] 或在具有内部自由度的流体中运动 [5]，以及布朗粒子在渗流集团上的运动时 [6]，无规涨落相干函数不再是 δ 函数了，而展现出幂律长时相干。

1990年7月20日收到原稿，同年10月4日收到修改稿。

为了方便起见，讨论一维的情况，显然布朗粒子的位移 x 是一个随机变量。假定布朗粒子受到摩擦阻力和长时相干的无规随机力的作用，则相应的 Langevin 方程为

$$m\ddot{x}+a(t)\dot{x}=F(t) \tag{1}$$

其中 m 为 Brownian 粒子的质量，$a(t)$ 是阻尼系数，$F(t)$ 具有以下相干性质：

$$\begin{cases} \langle F(t)\rangle = 0 \\ \langle F(0)F(t)\rangle = C(t)\sim t^{-\beta} \end{cases} \tag{2}$$

指数 β 值一般可取 $0<\beta<1$，$\beta=1$，$1<\beta<2$，实际上 β 是由物理过程的动力学机制确定的。另外请注意，$C(t)$ 与 $t^{-\beta}$ 之间的比例系数是与时间无关，但与 β 有关，即一般情况下，不同的物理过程其比例系数是不同的。于是我们可以把相干函数写成 $C(t)=E(\beta)t^{-\beta}$ 的形式。如果 $C(t)$ 是 δ 函数，随机过程是 Markov 过程，相应于这种情况下的布朗粒子作普通的布朗运动，相应的 Fokker-Planck 方程及其解，在非平衡统计物理的教科书中可找到。但是对于长时相干的情况，则是一个非 Markov 过程，不存在象普通布朗运动那样简单的 Fokker-Planck 方程，但是近似的Fokker-Planck方程也称为有效的 Fokker-Planck方程，一般可以用泛函分析的方法求得[7,8]。详细而复杂的推导将在其它地方论述[8]。在此只给出结果

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t}=D_e(t)\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} \tag{3}$$

其中 $D_e(t)$ 是有效的扩散系数，$p(x,t)$ 是在 t 时刻 x 位置处发现 Brownian 粒子的几率。在得到上式的过程中，实际已承认了 $t=0$，$x=0$。与普通的布朗运动的 Fokker-Planck 方程相比较，我们发现形式上相似，但扩散常数被含时间的有效扩散系数所代替。

由 Einstein关系和广义的涨落耗散定理可知，有效的扩散系数是由无规涨落力的长时相干效应所决定。阻尼系数和有效扩散系数由 $D_e(t)\sim 1/a(t)$ 关系式联系起来。而阻尼系数和无规涨落力的相干函数之间的关系[6]是通过方程

$$a(t)\sim\frac{1}{t}\int_0^t sC(s)ds\sim[E(\beta)/t]\int_0^t s^{1-\beta}ds\sim[E(\beta)/(2-\beta)]t^{1-\beta}$$

联系起来。应该注意的是，$C(t)$ 是无规力的相关函数，而不是速度自相关函数。于是 $D_e(t)$ 可表示成

$$D_e(t)=D_0/a(t)=D_0(2-\beta)t^{\beta-1}/E(\beta)=F(\beta)t^{\beta-1} \tag{4}$$

其中 $F(\beta)=(2-\beta)/E(\beta)$，$D_0$ 将证明为普通布朗运动中的扩散常数。把（4）代入（3）式可得到

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t}=D_0F(\beta)t^{\beta-1}\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} \tag{5}$$

下面将要证明，当 β 和 $F(\beta)$ 取不同的值时，上式既可以描述普通布朗运动，也可以描述分形布朗运动。

三、分形布朗运动的Fokker-Planck方程的解

当 $\beta=1$，$F(\beta)=1$ 时方程简化成

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t}=D_0\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} \tag{6}$$

众所周知，偏微分方程（6）包含初始条件 $p(x,0)=\delta(x)$ 的精确解为

$$p(x,t)=(1/\sqrt{4\pi D_0 t})\exp(-x^2/4D_0 t) \tag{7}$$

显然（6）和（7）式分别为普通布朗运动的Fokker-Planck 方程及其解。于是我们也看到，方程（5）中的D_0就是普通布朗运动的扩散系数。

当$F(\beta)=\beta$，$0<\beta<1$，或$1<\beta<2$，方程（5）简化成

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t}=D_0\beta t^{\beta-1}\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} \tag{8}$$

利用Fourier 积分法，经过一些数学运算，可以求得初始值为$p(x,0)=\delta(x)$，方程（5）的精确解为

$$p(x,t)=(1/\sqrt{4\pi D_0 t^{\beta}})\exp(-x^2/4D_0 t^{\beta}) \tag{9}$$

现在来讨论 $p(x,t)$的标度性质，作如下标度变换

$$\begin{cases} x=b^{\beta/2}x \\ t=bt \end{cases}$$

则

$$p(x=b^{\beta/2}x,\ t=bt)=b^{-\beta/2}p(x,t) \tag{10}$$

方程（10）表明 $p(x,t)$ 具有自仿射性质[9,10]。

利用 $p(x,t)$ 可求得位移的一阶和二阶矩为

$$\begin{cases} \langle x(t)\rangle=0 & (11)\\ \langle[x(t)]^2\rangle=2D_0 t^{\beta}\sim t^{\beta} & (12)\end{cases}$$

大家知道分形布朗运动具有三大特点[3]，即$\langle x(t)\rangle=0$，$\langle[x(t)]^2\rangle\sim t^{2H}$，$0<H<1/2$，$1/2<H<1$，以及分形布朗运动的轨迹具有自仿射性。所以，若是$\beta=2H$，我们很容易看出，方程（8）是描述分形布朗运动的Fokker-Planck方程，而方程（9）是其精确解，即是描述分形布朗运动的概率分布函数，据我们所知，这是第一次给出。

四、结论和讨论

通过以上分析，我们可以得出以下几点结论，并加以讨论。

（1）我们已第一次给出了分形布朗运动的Fokker-Planck 方程为

$$\partial p_{2H}(x,t)/\partial t=D_0 2Ht^{2H-1}(\partial^2 p_{2H}(x,t)/\partial x^2 \tag{13}$$

以及其精确解为

$$p_{2H}(x,t)=(1/\sqrt{4\pi D_0 t^{2H}})\exp(-x^2/4D_0t^{2H}) \tag{14}$$

（2）事实上，方程（13）式和（14）式可用来描述反常快和慢的扩散过程。由于$D_e(t)\sim t^{2H-1}$，当$0<H<1/2$或$0<\beta<1$，则（13）和（14）式可用来描述反常慢扩散过程[11]；当$1/2<H<1$，或$1<\beta<2$，方程（13）和（14）描述了反常快扩散过程[11]。

（3）值得注意的是，在得到方程（3）和（13）之前，我们的出发点是无规涨落力具有时间幂律长时相干，而非δ函数。而方程（13）是描述分形布朗运动以及反常扩散的基本方程。于是我们把长时相干效应和分形布朗运动以及反常扩散通过方程（2），（3）以及(13)联系起来了，同时也可看出产生分形布朗运动及反常扩散的物理基础是系统所受的无规涨落力具有长时相干性。

（4）分形布朗运动轨迹的分形维数d_f与指数H之间的关系为$d_f=1/H$[12]，于是可写成$d_f=2/\beta$，而β是由动力学过程和物理机制决定，因此，分形维数d_f既可象以前一样用几何的办法来求，也可以从分析物理过程的动力学机制来求。我们相信，从动力学机制来求分形维数将更为广泛地应用。

（5）如果把整个分数布朗运动过程看成由无穷多个元运动组成，而每个元运动看成是普通布朗运动，则$\langle \Delta x^2\rangle\sim D_e(t)dt$，于是整个分数布朗运动的位移二阶矩为

$$<[x(t)]^2>\sim\int D_e(t)dt\sim\int t^{\beta-1}dt\sim t^\beta$$

即得出与（12）式相同的形式，这也说明了我们的推导是正确的。

感谢董连科教授和邢修三教授的有益讨论和支持。

参　考　文　献

[1] Brown, R., *Phil. Mag.*, **4** (1828), 162.

[2] Einstein, A., Investigations on the Theory of the Brownian Movement, Dover, New York (1956).

[3] Mandelbrot, B.B. and Van Ness, J.W., *SIAM Review*, **10** (1968), 422.

[4] Adler, B.J. and Wainwright, T.E., *Phys. Rev. Lett.*, **18** (1967), 988; *Phys. Rev.*, **A1** (1970), 18.

[5] Reichl, L.E., *Phys. Rev.*, **A 24** (1981), 1609.

[6] Aharony, A., Scaling Phenomena in Disordered System, edited by R. Pynn and A. Skjeltorp, Plenum Press (1985), P.289.

[7] Fox, R.F., *Phys. Rev.*, **A33** (1986), 467; **A34** (1986), 4526.

[8] Wang, K.G. et al., Functional-Calculus Approach to Motion of a Damped Brownian Particle Evolving in a Long Time Correlation Fluctuating Force (to be published)

[9] Mandelbrot, B.B., The Fractal Geometry of Nature, Freeman, New York (1982).

[10] Feder, J., Fractals, Plenum Press, New York and London (1988).

[11] Bouchaud, J.P. et al., *Phys. Rev. Lett.*, **64** (1990), 2503.

[12] Voss, R., *Physica*, **D 38** (1989), 362.

LONG-TIME CORRELATION EFFECTS AND FRACTAL BROWNIAN MOTION

Wang Kegang, Long Qiwei

(*Institute of Metal Research, Academia Sinica, Shenyang* 110015, *The People's Republic of China*; *International Center for Materials Physics, Academia Sinica, Shenyang* 110015, *The People's Republic of China*)

ABSTRACT We present a comprehensive study of the motion of a damped Brownian particle undergoing a randomly fluctuating force with zero mean and a correlation function of a power-law time dependence, or $C(t)\sim t^{-\beta}$, $0<\beta<1$, $1<\beta<2$, instead of the Dirac delta-function. It is evident that this motion is fractional Brownian motion or fractal Brownian motion (fBm). The effective Fokker-Planck equation for fBm and its solution for fBm are presented. We have also established the quantitative relation of long-time correlation of a power law time dependence to the fBm and anomalous diffusion.

KEY WORDS fractal, Brownian and fractal Brownian motion, diffusion, Fokker-Planck equation.